Б.Шутц

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Написанное английским математиком введение в геометрические методы математической физики. Содержит основные сведения по дифференциальной геометрии вплоть до понятий римановой геометрии и общей теории связностей, а также некоторые физические приложения,— в частности, из общей теории относительности и теории калибровочных полей

Для математиков и физиков, желающих ознакомиться с приложениями геометрии в математической физике.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Учебная литература по дифференциальной геометрии достаточно обширна. Однако в большинстве учебников вопрос о приложениях дифференциальной геометрии к задачам математической физики даже не ставится. Это и неудивительно. Необходимость освоения дифференциально-геометрических методов всеми физиками-теоретиками (а не только теми, которые избрали своей специальностью общую теорию относительности) была осознана лишь в самое последнее время в связи с открытиями нетривиальных приложений геометрии и топологии в квантовой теории калибровочных полей, теории жидких кристаллов и сверхтекучести, той же общей теории относительности и других областях физики.

Предлагаемая вниманию читателей книга, написанная специалистом по общей теории относительности, является одним из первых элементарных учебников по дифференциальной геометрии, где при отборе материала во главу угла ставился прикладной аспект (это видно уже из её названия). Хотя она предназначена для первоначального знакомства с предметом, в ней обсуждается довольно много дифференциально-геометрических понятий. При сравнительно небольшом объёме книги это определило стиль изложения. Автор всюду стремится выделить главные геометрические идеи, отсылая читателя к литературе по поводу чисто технических деталей ряда доказательств. Изложение сопровождается большим количеством упражнений. что особенно важно для активного овладения предметом.

Особо следует сказать о разбираемых в книге физических иллюстрациях и приложениях дифференциально-геометрических идей. Среди них имеются ставшие уже общеизвестными, такие как изложение основных положений гамильтоновой механики на языке симплектической геометрии, интерпретация термодинамических тождеств на языке дифференциальных

форм, тензорная запись уравнений Максвелла в пространстве-времени специальной теории относительности. Но есть и менее традиционные — вывод существования энтропии для составных систем из классической формулировки второго начала термодинамики, анализ геометрической структуры уравнений гидродинамики идеальной жидкости, элементы теории калибровочных полей в свете общей теории связностей и др. Широкий спектр подбора физических иллюстраций позволит начинающим физикам разных специализаций уяснить важность геометрического аппарата как одного из инструментов современной теоретической физики. Начинающего же математика-геометра чтение этой книги побудит, как нам кажется, к более серьёзному изучению прикладных аспектов дифференциальной геометрии.

При переводе были исправлены замеченные опечатки, а также добавлен список ряда учебников на русском языке по тематике глав книги.

В заключение отметим, что учебник Б. Шутца получил ряд высоких отзывов специалистов-геометров и физиков-теоретиков. О его популярности свидетельствует выход второго английского издания (1982) вскоре вслед за первым (1980). Мы надеемся, что эта книга получит признание и у наших читателей.

Б. А. Дубровин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Зачем изучать геометрию?

Назначение этой книги — ввести начинающего или уже работающего физика в весьма широкий круг аналитических методов дифференциально-геометрического происхождения, которые ныне всё чаще и чаще применяются в теоретической физике. В наши дни при обучении физике «наглядное» и «интуитивное» рассмотрение физических явлений принято ставить во главу угла. Однако при обучении студентов-физиков математике геометрическими идеями и методами, за исключением самых простейших, обычно пренебрегают. Это поразительное пренебрежение наглядностью математического аппарата возникло не сразу, а является продуктом многовековой эволюции. Для античных и средневековых натурфилософов геометрия, несомненно, была крайне важна; и Птолемей, и Коперник, и Кеплер, и Галилей — все излагали свои рассуждения в геометрической форме. Но когда Декарт ввёл в эвклидову геометрию координаты, геометрия стала рассматриваться как приложение алгебры. С той поры роль геометрии в подготовке ученого начала сходить на нет, и в настоящее время студентам старших курсов университетов — физикам или математикам-прикладникам — почти вовсе не приходится сталкиваться с геометрией.

Одна из причин этого очевидна: сравнительно простая геометрия трёхмерного эвклидова мира (в котором, как думалось физику 19-го столетия, мы живём) осваивалась легко, в то время как изучение огромного разнообразия аналитических приёмов, которые необходимы для решения дифференциальных уравнений физики, было делом весьма нелегким и отнимало массу времени. Другая причина, наверное, состоит в том, что сами эти аналитические приёмы и методы разрабатывались, по крайней мере отчасти, на основе глубокого убеждения физиков, что законы природы могут быть записаны в виде дифференциальных уравнений, и это убеждение вплоть до самого последнего

времени позволяло физикам с чистой совестью пренебрегать геометрией.

Однако два достижения науки нашего столетия решительно изменили взгляды физиков 20-го века на соотношение между геометрией и анализом. Первым из них явилась теория относительности, согласно которой эвклидово трёхмерное пространство физика 19-го века — лишь приближение к правильному описанию физического мира. Вторым, лишь начинающим играть свою роль, было осознание математиками 20-го века, вслед за Э. Картаном, того, что соотношение между геометрией и анализом двустороннее: с одной стороны, анализ можно взять за основание при изучении геометрии, а с другой стороны, изучение геометрии естественно приводит к развитию определённого аналитического аппарата (производная Ли, исчисление дифференциальных форм и т. д.) и определённых понятий (многообразие, расслоенное пространство, трактовка векторов как дифференцирований и т. д.), играющих чрезвычайно важную роль в приложениях анализа. Согласно современным воззрениям, геометрия остается подчинённой анализу. Например, основное понятие дифференциальной геометрии, понятие дифференцируемого многообразия, определяется на языке теории вещественных чисел и дифференцируемых функций. Но никакого вреда в этом нет; наоборот, благодаря этому становится возможным представить понятия анализа геометрически, а это имеет огромное эвристическое значение.

Именно потому, что современная дифференциальная геометрия разрабатывает и эксплуатирует эту тесную взаимосвязь между геометрическими и аналитическими понятиями и идеями, она становится всё более и более важной в теоретической физике, упрощая математический формализм и углубляя физическое понимание. Это возрождение геометрии оказало влияние не только на специальную и общую теории относительности, очевидно геометрические по своей сути, но и на другие разделы физики, где на авансцену выходит уже не геометрия физического пространства, а геометрия более абстрактных пространств, — термодинамику, гамильтонов формализм, гидродинамику и физику элементарных частиц.

Цели этой книги

В этой книге я хотел дать читателю представление о наиболее важных понятиях дифференциальной гео-

метрии 20-го века, стараясь при этом всюду использовать наглядный геометрический способ рассуждений, столь полезный для развития физической интуиции. Книга призвана научить математике, а не физике. Но в неё включены разнообразные приложения этой математики к разделам физики, хорошо знакомым большинству студентов старших курсов. Надеюсь, что эти примеры окажутся более чем просто иллюстрациями к математическим теоремам, — новые математические формулировки знакомых физических результатов должны дать читателю более глубокое понимание физики.

Ниже будет более подробно обсуждаться, какая подготовка требуется для чтения этой книги, а здесь, пожалуй, полезно привести краткий список «знакомых» понятий, которые будут показаны под новым углом зрения: векторы, тензоры, скалярное произведение, специальная теория относительности, сферические гармоники и группа вращений (а также операторы момента), законы сохранения, объём, теория интегрирования, ротор и векторное произведение, определитель, уравнения в частных производных и условия их интегрируемости, формулы Гаусса и Стокса из векторного анализа, термодинамика простых систем, теорема Каратеодори (и второе начало термодинамики), гамильтоновы системы в фазовом пространстве, уравнения Максвелла, гидродинамика (включая теорему о сохранении циркуляции), векторный анализ в криволинейных координатах, квантовая теория заряженного скалярного поля. Помимо этих более или менее привычных тем есть и другие, о которых, хотя их обычно и не включают в обязательные курсы, большинство читателей наверняка кое-что слышало: теория групп Ли и симметрия, открытая и замкнутая космологические модели, риманова геометрия и теория физических калибровочных полей. То, что все эти темы можно исследовать методами дифференциальной геометрии, служит явным указанием на ту роль, которую она, по-видимому, будет играть в теоретической физике будущего.

Я считаю, что читателю важно выработать наглядный стиль мышления и развить в себе чувство «естественности» того или иного геометрического аппарата в определённых ситуациях. Имея это в виду, я постоянно подчёркиваю идею, что тензоры — это геометрические объекты, определённые независимо от какой-либо системы координат. Компонентам и коор-

динатным преобразованиям неизменно отводится вторая роль — всюду, где только возможно, я записываю уравнения в безындексной форме, с тем чтобы подчеркнуть их независимость от выбора системы координат. Я не стремился дать логически замкнутое или аксиоматическое изложение и потому оставил в стороне ряд аспектов, которые математик счел бы основополагающими. Разумеется, я даю доказательства всех наиболее важных результатов, если эти доказательства не слишком уже громоздки (в таком случае я даю точные ссылки на литературу), но насколько только это было возможно, я всюду старался добиться, чтобы главная геометрическая идея доказательства чётко выделялась на фоне выкладок. Я хотел показать красоту, элегантность и естественность излагаемых математических приемов, не затемняя суть дела излишними подробностями.

Как пользоваться этой книгой

Первая глава содержит обзор основных математических сведений, которые предполагаются известными читателю, а также краткое введение в некоторые разделы, в частности в топологию, с которыми старшекурсник может и не быть знаком. Следующие три главы являются ядром книги; в них вводятся тензоры, производные Ли и дифференциальные формы. По этим главам рассеяны и некоторые приложения излагаемого аппарата, но большинство физических приложений систематически разбираются в гл. 5. В последней, шестой главе, посвящённой римановой геометрии, представлен более сложный материал, имеющий непосредственное отношение к физике элементарных частиц и общей теории относительности, для которых дифференциальная геометрия является повседневным рабочим инструментом.

Материал этой книги может быть использован для семестрового курса, при условии что наиболее сложные разделы будут представлены лишь выборочно, по усмотрению лектора. Наиболее важные разделы можно использовать также для специального курса по математическим методам физики, лекций на десять. Я читал такой спецкурс для аспирантов, основываясь на §§ 2.1—2.3, 2.5—2.8, 2.12—2.14, 2.16, 2.17, 2.19—2.28, 3.1—3.13, 4.1—4.6, 4.8, 4.14—4.18, 4.20—4.23, 4.25, 4.26, 5.1, 5.2, 5.4—5.7 и 5.15—5.18. Надеюсь, преподаватели сами будут экспериментировать с отбором материала для курса, учитывая аудиторию: для

многих студентов геометрическое изложение понятнее чисто аналитического, и для них только полезно как можно раньше войти в круг геометрических идей. Для того чтобы читателю было легче ориентироваться в книге, заголовки параграфов набраны двумя различными шрифтами. Основной материал маркируется **жирным прямым** шрифтом заголовков, а более сложный или дополнительный — ***жирным курсивом*** К последней категории относится вся заключительная глава. Такие же шрифтовые выделения помогают отличить упражнения, лежащие в центральном русле изложения, от периферийных.

Упражнения составляют неотъемлемую часть книги. Они расположены внутри текста, и имеется в виду, что читатель решает их по мере их появления. Обычно текст, следующий за упражнением, предполагает, что это упражнение уже проработано и понято. Читатель, у которого нет времени решать упражнение, должен во всяком случае прочитать его и постараться понять результат. В конце книги даны решения и указания к некоторым упражнениям.

Требования, предъявляемые к читателю

Бо́льшая часть этой книги должна быть понятна студентам-старшекурсникам или начинающим аспирантам, специализирующимся в теоретической физике или прикладной математике. Предполагается, что читатель достаточно уверенно владеет векторным анализом, дифференциальным и интегральным исчислением функций многих переменных, матричной алгеброй (включая собственные векторы и определители), а также — немного — теорией операторов в том виде, как она изучается в элементарной квантовой механике. Физические приложения брались из самых разных областей, так что не всякий будет чувствовать себя как дома во всех из них. Многие приложения можно пропустить при первом чтении без особого ущерба для связности изложения, но, пожалуй, нереалистично пытаться читать эту книгу без некоторого знакомства с классической механикой, специальной теорией относительности и электродинамикой. В библиографии в конце первой главы перечислен ряд руководств, дающих достаточную подготовку для чтения этой книги.

Я хотел бы выразить признательность многим лицам — учителям и коллегам, которые помогли мне оценить красоту дифференциальной геометрии и

понять важность её для физики. Особая моя благодарность Кипу Торну, Рэфиэлу Соркину, Джону Фридмэну и Фрэнку Эстабруку. Мне хочется также поблагодарить первых двух из названных лиц и многих прилежных студентов Университетского колледжа в Кардиффе за замечания по поводу первых вариантов этой книги. Двое из моих учеников, Нил Коминз и Брайен Уэйд, заслуживают особого упоминания за вдумчивые, конструктивные советы. Мне приятно поблагодарить Сюзэн Болл, Джейн Оуэн и Маргрит Уилкинсон за быструю и аккуратную перепечатку многочисленных вариантов рукописи. Наконец, я благодарен жене за терпение и поддержку, особенно в последние горячие месяцы.

Бернард Шутц

Кардифф, 30 июня 1979

1. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

В этой главе даётся обзор понятий из различных разделов математики, на которых будут основываться геометрические рассмотрения последующих глав. Бо́льшая часть излагаемого ниже должна быть известна большинству читателей, но два раздела — топология и теория отображений — наверняка незнакомы многим читателям; с них мы и начнём. Главная причина включения этих разделов — то, что это нужно для строгого определения понятия многообразия, которое мы вводим в самом начале гл. 2. Читатели, незнакомые с топологией, могут пропустить первые два параграфа при первом чтении и вернуться к ним лишь после того, как почувствуют в этом потребность, читая вторую главу.

1.1. ПРОСТРАНСТВО R^n И ЕГО ТОПОЛОГИЯ

Пространство R^n — это обычное n-мерное пространство векторной алгебры; точка в R^n — это последовательность из n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Интуитивно мы представляем себе это пространство *непрерывным*: для любой данной точки в R^n существуют сколь угодно близкие точки, и отрезок, соединяющий две любые точки, может быть разбит на сколь угодно много отрезков, концы которых также являются точками R^n. Эти свойства резко отличаются, скажем, от свойств решёток, таких как совокупность всевозможных наборов из n целых чисел $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Понятие непрерывности в пространстве R^n получает точный смысл при изучении его *топологии*. В математике слово «топология» имеет два различных значения. Та топология, которую мы сейчас будем изучать, может быть названа *локальной*. В противоположность ей *глобальная* топология — это изучение свойств пространства «в целом», отличающих, например, сферу от тора. Мы немного поговорим о глобальной топологии позже, в частности в главе о дифференциальных формах. Начнем же мы с краткого обзора локальной топологии.

Основным понятием здесь является понятие окрестности точки в R^n. Его можно определить, введя функцию расстоя-

ния между точками $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ в R^n:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2]^{1/2}. \qquad (1.1)$$

Окрестность радиуса r точки $\mathbf{x}$ в R^n — это множество точек $N_r(\mathbf{x})$, расстояние которых до $\mathbf{x}$ меньше r. Для случая R^2 это показано на рис. 1.1. Непрерывность пространства может быть теперь более точно определена при помощи малых окрестностей. Множество точек в R^n *дискретно*, если каждая точка этого множества имеет окрестность, не содержащую

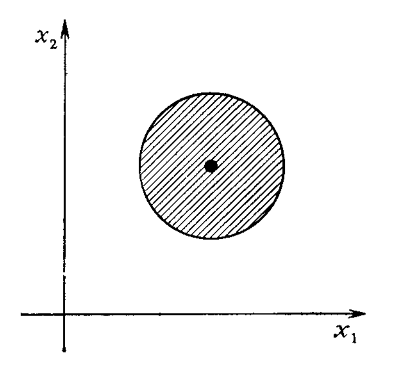


Рис. 1.1. Функция расстояния $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задаёт окрестность в R^2, представляющую собой внутренность круга, ограниченного окружностью радиуса r. Сама окружность не является частью этой окрестности.

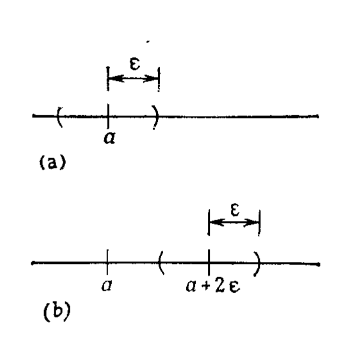


Рис. 1.2. (a) Любая окрестность точки $x = a$ содержит точки, расположенные слева от a, в то время как (b) любая точка, лежащая справа от a, обладает окрестностью, целиком расположенной по правую сторону от a.

других его точек. Ясно, что само R^n не дискретно. Говорят, что множество точек S в R^n *открыто*, если каждая точка $\mathbf{x}$ из S имеет окрестность, целиком содержащуюся в S. Ясно, что дискретные множества не открыты, и дальше мы их не будем использовать. Простой пример открытого множества в пространстве R^1 (последнее обозначается также просто через R) — множество всех точек x, для которых $a < x < b$ для двух заданных вещественных чисел a и b. Важно уяснить себе, что множество точек x, для которых $a \leqslant x < b$, *не* открыто, поскольку точка $x = a$ не имеет окрестности, целиком содержащейся в этом множестве: часть точек *любой* окрестности точки $x = a$ меньше, чем a, и поэтому они выходят из этого множества (см. рис. 1.2). Это, разумеется, весьма общее свойство: любой разумный «кусок» пространства R^n будет открытым, если не включать в этот кусок его границу.

Представление о том, что отрезок, соединяющий любые две точки R^n, бесконечно делим, можно сделать точным, если сказать, что любые две различные точки в R^n имеют непересекающиеся окрестности. (У них есть и такие окрестности, которые *пересекаются*, но если сделать их достаточно маленькими, они пересекаться не будут.) Это свойство называется *отделимостью* (или *хаусдорфовостью*) пространства R^n. Можно построить и неотделимые пространства, но для наших целей они неестественны, и мы о них говорить не будем.

Итак, мы использовали функцию расстояния $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для того, чтобы определить окрестности и, тем самым, открытые множества. В этом смысле мы говорим, что $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *индуцирует топологию* в R^n. Под этим мы подразумеваем, что она позволяет определить открытые множества в R^n, обладающие следующими свойствами:

(Ti) если O_1 и O_2 открыты, то и их пересечение $O_1 \cap O_2$ открыто;

(Tii) объединение любой (возможно, бесконечной) совокупности открытых множеств открыто.

Для того чтобы свойство (Ti) было применимо ко всем открытым множествам в R^n, будем считать пустое множество открытым *по определению*. (В более обстоятельных курсах *топологическое пространство* определяется как совокупность точек с заданным набором открытых множеств, удовлетворяющим (Ti) и (Tii). С этой точки зрения функция расстояния $d(x, y)$ позволяет превратить пространство R^n в топологическое.)

Уместно спросить, насколько индуцированная топология зависит от точного вида функции $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Предположим, например, что мы используем другую функцию расстояния

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [4(x_1 - y_1)^2 + 0.1(x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}. \qquad (1.2)$$

Она также определяет окрестности и открытые множества в R^2, как это изображено на рис. 1.3. Решающим здесь является то обстоятельство, что каждое множество, открытое по отношению к $d'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, будет открыто и по отношению к $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, и наоборот. Это несложно доказать, основываясь на том, что любая данная d-окрестность точки $\mathbf{x}$ содержит внутри себя некоторую d'-окрестность и наоборот. Другими словами, для данной d-окрестности точки $\mathbf{x}$ радиуса ε можно подобрать столь малое число δ, что d'-окрестность точки $\mathbf{x}$ радиуса δ будет целиком содержаться в первой окрестности

(см. рис. 1.4). Отсюда можно заключить, что каждое множество, открытое по отношению к $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, открыто также и по отношению к $d'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и наоборот. Мы говорим поэтому, что d и d' индуцируют одну и ту же топологию в R^n. Читатель может проверить, что функции расстояния

$$d''(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp[d(\mathbf{x}, \mathbf{y})] - 1, \qquad (1.3)$$

$$d'''(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|) \qquad (1.4)$$

также индуцируют ту же топологию. Соответствующие окрестности в R^2 изображены на рис. 1.5. Так что, хоть мы и

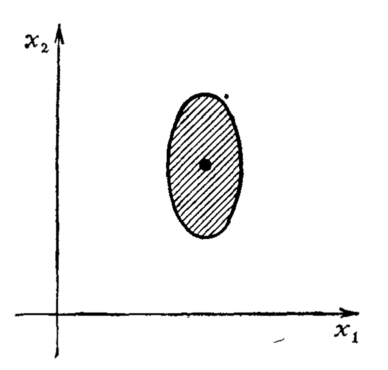


Рис. 1.3. Функция расстояния $d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [4(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$ определяет окрестность в R^2, состоящую из точек, лежащих внутри эллипса $4(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = r^2$. Как и в случае рис. 1.1, сам эллипс не принадлежит к окрестности.

Рис. 1.4. В R^2 d-окрестность радиуса ε (ограниченная окружностью) целиком содержит в себе d'-окрестность радиуса δ (ограниченную эллипсом, показанным на рис. 1.3) при $\delta < \varepsilon$. При $\delta > 2\varepsilon$ включение заменяется на обратное.

начинали с обычной эвклидовой функции расстояния $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, топология, которую мы определили, не слишком зависит от вида d. Она называется «естественной» топологией R^n. Топология— более «грубое» понятие по сравнению с расстоянием. Нам не нужно знать точное значение расстояния между точками, поскольку расстояние можно определить по-разному. Нужно лишь знать, что расстояние между точками может быть сделано произвольно малым и что расстояние между двумя различными точками никогда не может быть равно нулю.

Наше определение окрестности было привязано к конкретной функции расстояния, но, поскольку топология многообразия есть объект более общий, чем конкретная функция

расстояния, слово «окрестность» будет часто использоваться в другом смысле. Нам часто будет удобно считать *окрестностью* точки **x** любое множество, содержащее открытое мно-

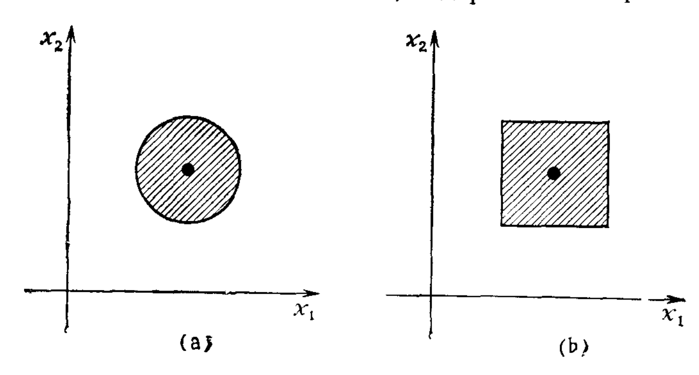


Рис. 1.5. (a) В R^2 функция расстояния d'' задаёт круговые окрестности, меньшие при том же радиусе, чем окрестности, задаваемые функцией d. (b) Окрестность, отвечающая функции d''', ограничена квадратом со стороной $2r$.

жество, содержащее **x**. Из контекста каждый раз будет ясно, что именно имеется в виду под «окрестностью».

1.2. ОТОБРАЖЕНИЯ

Понятие отображения, хоть и очень простое, будет столь полезно в дальнейшем, что стоит потратить немного времени на его обсуждение. Отображение f из пространства M в про-

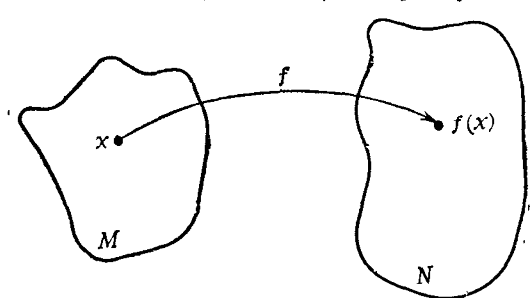


Рис. 1.6. Наглядное представление отображения f: $M \to N$; показано, что $x \mapsto f(x)$.

странство N — это правило, сопоставляющее всякому элементу x из M некоторый единственный элемент $f(x)$ из N. Полезно представлять себе картинку типа показанной на рис. 1.6. Простейший пример отображения — это обычная вещественнозначная функция на R. Такая функция f сопостав-

ляет точке x из R точку $f(x)$, снова из R. (Это служит иллюстрацией того факта, что пространства M и N не обязательно различны.) Подобное отображение обычным образом представлено на рис. 1.7. Отметим, что отображение даёт единственное $f(x)$ для каждого x, но вовсе не обязательно, чтобы единственное x отвечало каждому $f(x)$. На рисунке и x_0, и x_1 отображаются в одно и то же значение. Такое отображение назовем *слепляющим* [1]. Более общо, если f отображает M в N, то для любого подмножества S в M элементы из N, в которые отображаются точки из S, образуют множество T,

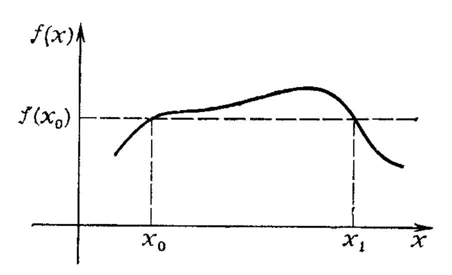


Рис. 1.7. Отображение (функция) из R в R, не являющееся взаимно-однозначным.

называемое *образом* S относительно f и обозначаемое через $f(S)$. Наоборот, множество S, состоящее из всех элементов, отображающихся в T, называется *прообразом* T и обозначается через $f^{-1}(T)$. Если данное отображение переводит несколько точек в одну, то прообраз точки из N не будет, вообще говоря, точкой в M, так что в этом случае нет *отображения* f^{-1} из N в M, ибо отображение обязано быть однозначным. Поэтому в общем случае обозначение $f^{-1}(T)$ может восприниматься лишь как единый символ — это не есть образ T относительно отображения f^{-1}, а просто некое множество, обозначаемое через $f^{-1}(T)$. Напротив, если каждая точка из $f(S)$ имеет одноточечный прообраз в S, то говорят, что f *инъективно* или *взаимно-однозначно* (сокращенно: является 1-1-*отображением*); в этом случае имеется другое 1-1-отображение f^{-1}, называемое *обратным* к f, переводящее образ M в M. Эти понятия известны из элементарного курса анализа, хотя там они, возможно, так и не назывались. Функция $f(x) = \sin x$ не инъективна (является слепляющей), поскольку $f(x) = f(x + 2n\pi) = f((2n + 1)\pi - x)$ при любом целом n. Следовательно, для неё настоящей обратной функции не существует. Общепринятая обратная функция, $\arcsin y$, получается, если ограничить обычный синус на область «главных»

[1] В оригинале many-to-one — *Прим. ред.*

значений, $-\pi/2 < x \leqslant \pi/2$, где он уже взаимно-однозначен и обратим.

Другим примером 1-1-отображения является географическая карта данной части земной поверхности: точка поверхности Земли отображается в точку на листе бумаги. Ещё один пример отображения — это поворот сферы на данный угол вокруг некоторого диаметра: точка сферы отображается в другую точку той же сферы, находящуюся от неё на фиксированном угловом расстоянии по отношению к заданной оси вращения.

Введём теперь для отображений некоторые стандартные обозначения и терминологию. То что f отображает M в N, будет сокращённо записываться так: $f\colon M \to N$. Для выражения того факта, что f переводит данный элемент x из M в элемент y из N, служит специальная запись $f\colon x \mapsto y$. Если отображение обозначается через f, то образ точки x — через $f(x)$. Если отображение есть вещественнозначная функция, скажем функция n переменных (т. е. $f\colon R^n \to R$), то принято среди физиков использовать один и тот же символ $f(x)$ и для значения f в точке x, и для самой функции f. Мы будем следовать этой традиции там, где из-за этого не сможет произойти недоразумений. Если имеются два отображения, f и g, $f\colon M \to N$ и $g\colon N \to P$, то определено отображение, называемое *композицией* f и g и обозначаемое через $g \circ f$, которое отображает M в P ($g \circ f\colon M \to P$). Оно строится очевидным образом: берём точку x из M, находим точку $f(x)$ из N и отображаем её при помощи g в P: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Композицию $g \circ f$ принято записывать именно в таком порядке, так что отображение, действующее первым, стоит справа.

В общем случае мы говорим об отображении из M *в* N. Если же каждая точка из N имеет прообраз (не обязательно одноточечный), то мы говорим об отображении из M *на* N[1]. Как уже отмечалось выше, в случае если прообразы одноточечны, отображение инъективно. (Отображение, которое одновременно является 1-1-отображением и отображением *на*, называется *биекцией*.) Например, пусть N — единичный открытый круг в R^2, т. е. множество всех точек $\mathbf{x}$, для которых $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < 1$ (где $\mathbf{0}$ — начало координат в R^2), и пусть M — полусфера $\theta < \pi/2$ единичной сферы (см. рис. 1.8). Ясно, что имеется взаимно-однозначное отображение M на N.

Введённая терминология теории отображений вместе с тем, что мы уже знаем из топологии, позволяют дать полезное и короткое определение непрерывной функции или, фактически, произвольного непрерывного отображения. Отображение $f\colon M \to N$ *непрерывно в точке* x из M, если любое от-

[1] Или о *сюръективном* отображении. — *Прим. ред.*

крытое множество в N, содержащее $f(x)$, содержит образ некоторого открытого множества из M, содержащего точку x. (Предполагается, конечно же, что M и N — топологические пространства. В противном случае говорить о непрерывности бессмысленно.) Далее, f *непрерывно на* M (или просто *непрерывно*), если оно непрерывно во всех точках M. Посмотрим, как это связано с обычным определением непрерывной функции из курса математического анализа.

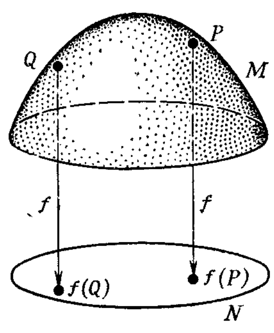


Рис. 1.8. Рассматривая круг как экваториальное сечение шара, ограниченного сферой, легко построить биективное отображение верхней полусферы на круг, используя ортогональную проекцию.

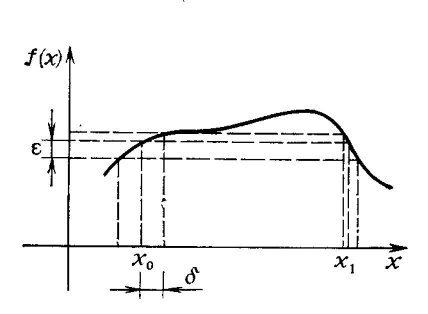


Рис. 1.9. Непрерывная функция в том смысле, как это было определено в тексте. Отметим, что f переводит окрестность точки x_0 радиуса δ в окрестность точки $f(x_0)$ радиуса ε, в то время как прообраз этой последней окрестности содержит первую, но не обязательно совпадает с ней. Он может содержать другие области оси x, например такие, как в правой части рисунка. Если f непрерывна и в этой второй окрестности, то прообраз будет открытым множеством.

Пусть f — вещественная функция одной вещественной переменной. Другими словами, f отображает R в R, переводя число x в число $f(x)$. (В наших обозначениях $f: R \to R$.) С точки зрения элементарного анализа f непрерывна в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ (см. рис. 1.9). Чтобы переформулировать это в терминах открытых множеств, заметим, что для R функция расстояния $d'''(\mathrm{x}, \mathrm{x}_0)$, введённая в § 1.1, сводится к $d'''(x, x_0) = |x - x_0|$. Значит, согласно этому определению, f непрерывна в точке x_0, если каждая d'''-окрестность $f(x_0)$ содержит образ некоторой d'''-окрестности точки x_0. Поскольку эти окрестности являются открытыми множествами, непрерывность в смысле определения, данного в предыдущем абзаце, влечёт за собой непрерывность в смысле элементарного

математического анализа. Наоборот, непрерывность в смысле элементарного анализа влечёт за собой непрерывность в смысле нового определения, поскольку любое открытое множество в R, содержащее $f(x_0)$, содержит d'''-окрестность $f(x_0)$, которая в свою очередь содержит образ некоторого открытого множества, содержащего x_0 (а именно образ d'''-окрестности точки x_0). Итак, эти два определения эквивалентны.

Условие непрерывности отображения на всём M даже легче формулировать, чем условие непрерывности в одной точке: имеется теорема, что $f\colon M \to N$ непрерывно, если и только если прообраз каждого открытого множества из N открыт в M. Доказательство этой теоремы несложно. Если f непрерывно при всех x, то прообраз каждого открытого множества открыт, поскольку любая точка этого прообраза содержится в некотором открытом множестве, содержащемся в этом прообразе. Обратно, если прообраз каждого открытого множества из N открыт, то для каждой из своих точек он содержит некоторое открытое множество, её содержащее, так что f непрерывно в каждой точке.

Определение непрерывности на языке открытых множеств намного легче использовать и понимать, чем определение на языке «ε-δ», в особенности для функций многих переменных; оно, несомненно, является единственно пригодным для общих отображений топологических пространств.

Определив непрерывность, мы можем перейти к обычному определению дифференцируемости функций. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, определённая на некотором открытом множестве S в R^n, то мы будем называть ее *дифференцируемой класса* C^k, если все её частные производные до порядка k включительно непрерывны на S. Для краткости будем называть такую функцию C^k-функцией. Частные случаи — класс C^0 (непрерывные функции) и C^∞ (функции, у которых существуют все производные; обычно они называются бесконечно дифференцируемыми). Очевидно, что функции класса C^k являются и функциями класса C^j для всех $0 \leqslant j < k$. Можно определить и понятие производной для таких более общих непрерывных отображений. (Эти производные часто называют дифференциалами.) Интересующийся читатель может найти соответствующие определения в книгах Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette & Dillard-Bleick (1977), или Warner (1971)[1)] (см. библиографию в конце главы).

Если 1-1-отображение переводит открытое подмножество M в R^n на другое открытое множество N в R^n, оно может

[1)] Или у Зорича [5] (см. литературу, добавленную при переводе). — *Прим. ред.*

быть записано в виде

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{или} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}),$$

где набор $\{x_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ определяет точку $\mathbf{x}$ из M и набор $\{y_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ определяет аналогичную точку $\mathbf{y}$ из N. Если функции $\{f_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ все класса C^k, то отображение f называется отображением класса C^k (или C^k-отображением). *Матрица Якоби* C^1-отображения — это матрица из частных производных $\partial f_i/\partial x_i$. Определитель J этой матрицы называется просто *якобианом* и часто обозначается так:

$$J = \partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.5}$$

Если якобиан в точке $\mathbf{x}$ не обращается в нуль, то *теорема об обратной функции* гарантирует взаимную однозначность отображения f на некоторой окрестности точки $\mathbf{x}$ (по поводу доказательства этой теоремы см. Шоке-Брюа и др. (1977)[1]).

Если функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_*(y_1, \ldots, y_n)$ связаны между собой формулой

$$g_*(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) = g(x_1, \ldots, x_n)$$

(т. е. g_* принимает такое же значение в $f(\mathbf{x})$, что и g в $\mathbf{x}$), то интеграл g по M равен интегралу g_*J по N:

$$\int_M g(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_N g_*(y_1, \ldots y_n)\,J\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n. \tag{1.6}$$

Поскольку g и g_* принимают одинаковые значения в соответствующих точках, часто говорят, что элемент объема $\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ заменяется на $J dy_1 \ldots dy_n$. Эта точка зрения особенно полезна, когда f рассматривается как замена координат. Хотя эта формула и общеизвестна из курса анализа, мы разберем её более подробно в § 2.25 и 4.8.

1.3. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ (ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ)

Как уже отмечалось, предполагается, что читатель знаком с теорией функций многих переменных. В этом параграфе мы лишь выделим наиболее существенные моменты.

Вещественная функция одной вещественной переменной $f(x)$ называется *аналитической* в точке $x = x_0$, если она об-

---

[1] Или Зоорич [5]. — *Прим. ред.*

ладает в этой точке *тэйлоровым разложением*, сходящимся к $f(x)$ в некоторой окрестности x_0:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0} + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_x + \ldots . \quad (1.7)$$

Естественно, что функции, не являющиеся бесконечно дифференцируемыми в точке x_0 (т. е. такие, что $(d^nf/dx^n)x_0$ не существует для некоторого n), не аналитичны в x_0. Но имеются и бесконечно дифференцируемые функции, которые не аналитичны. Знаменитый пример — это функция $\exp(-1/x^2)$, значение и все производные которой равны нулю при $x = 0$, но которая отлична от нуля в любой окрестности $x = 0$. (Это объясняется тем, что аналитическое продолжение этой функции в комплексную плоскость имеет существенную особенность при $z = 0$; на вещественной же оси она ведёт себя совершенно нормально.) Впрочем, несколько успокаивает то, что аналитические функции дают хорошие приближения для многих неаналитических функций в следующем смысле. Вещественнозначная функция $g(x_1, \ldots, x_n)$, определённая в некоторой открытой области S в R^n, называется *квадратично-интегрируемой*, если существует кратный интеграл

$$\int_S [g(x_1, \ldots, x_n)]^2\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \quad (1.8)$$

Известна теорема функционального анализа, по которой каждую квадратично-интегрируемую функцию g можно аппроксимировать аналитической функцией g' так, что интеграл от $(g - g')^2$ по S будет сколь угодно малым. В силу этого физики обычно не колеблясь предполагают данные функции аналитическими, если только это помогает получить результат; так же будем поступать и мы. Поскольку C^∞-функции не обязаны быть аналитическими, для аналитических функций имеется специальное обозначение: C^ω. Разумеется, C^ω-функция является C^∞-функцией.

Оператор A на функциях, определённых на R^n, — это отображение, переводящее одну функцию f в другую $A(f)$. Если $A(f)$ имеет вид gf, где g — некоторая фиксированная функция, то этот оператор есть простое умножение. Другие примеры операторов на функциях на R — это обычное дифференцирование

$$D(f) = \partial f/\partial x,$$

или интегрирование с заданным ядром g

$$(G(f))(x) = \int_0^x f(y)\, g(x, y)\, dy,$$

или же более сложный оператор типа

$$E(f) = f^2 + \partial^3 f/\partial x^3.$$

Оператор может быть определён на всех функциях f, а может и не на всех. Например, D определён лишь на дифференцируемых функциях, а G не определён на функциях, для которых записанный выше интеграл не существует. Указание множества функций, на которые оператор может действовать, составляет часть определения оператора; это множество называется его *областью определения.*

Коммутатор двух операторов A и B, обозначаемый через $[A, B]$, — это новый оператор, определённый равенством

$$[A, B](f) = (AB - BA)(f) = A(B(f)) - B(A(f)). \qquad (1.9)$$

Если два оператора имеют нулевой коммутатор, то говорят, что они *коммутируют*. Здесь нужно быть осторожным с областями определения операторов: область определения оператора $[A, B]$ может быть меньше, чем область определения A или B. Например, если $A = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ и $B = x\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, то в качестве их областей определения можно взять все C^1-функции. Но не для всех C^1-функций f определено $A(B(f))$, так как в это выражение входят вторые производные. В качестве областей определения операторов AB и BA можно взять множество всех C^2-функций, более узкое, чем множество C^1-функций. Тогда и коммутатор $[A, B]$ будет иметь своей областью определения лишь C^2-функции. В данном случае можно, однако, расширить область определения (это называется также *расширением* оператора), основываясь на следующем наблюдении. Легко проверить, что для любой C^2-функции f

$$[A, B](f) = [\mathrm{d}/\mathrm{d}x, \quad x\mathrm{d}/\mathrm{d}x]f = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x,$$

поскольку вторые производные в AB и BA взаимно сокращаются. Поэтому можно отождествить $[A, B]$ с $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ (т. е. с самим A) и тем самым расширить его область определения до всех C^1-функций. Мы видим, что коммутатор может оказаться определённым даже на таких функциях, на которых произведения в коммутаторе не определены. При работе с дифференциальными операторами часто бывает удобнее, по крайней мере поначалу, брать в качестве их области определения C^∞-функции. Позже мы именно так и будем поступать, и заботиться об областях определения не придётся.

1.4. ТЕОРИЯ ГРУПП

Совокупность элементов G вместе с бинарной операцией (обозначаемой точкой) называется *группой*, если удовлетворяются следующие аксиомы:

(Gi) Ассоциативность: для любых x, y и z из G

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

(Gii) Наличие правой единицы: G содержит элемент e, такой что для любого x из G

$$x \cdot e = x.$$

(Giii) Существование правого обратного: для любого x из G существует элемент, обозначаемый через x^{-1}, также лежащий в G, такой что

$$x \cdot x^{-1} = e.$$

Группа называется *абелевой* (*коммутативной*), если, кроме того,

(Giv) $x \cdot y = y \cdot x$ для любых x, y из G.

Стандартным примером группы с конечным числом элементов является группа перестановок n объектов; бинарная композиция двух перестановок — это перестановка, получаемая в результате их последовательного выполнения. В этой группе $n!$ элементов. Единичным элементом служит перестановка, оставляющая все объекты неподвижными.

Из (Gi)—(Giii) можно вывести ряд простых следствий: единичный элемент e единствен; e является также и левым единичным $(e \cdot x = x)$; обратный элемент x^{-1} единствен для каждого x; x^{-1} является также левым обратным $(x^{-1} \cdot x = e)$. Знак $\cdot$ обычно опускают, если нет риска ошибиться: вместо $x \cdot y$ пишут просто xy.

В современной физике наиболее важны группы Ли, о которых мы будем много говорить ниже. Точное определение будет дано в гл. 2, здесь же достаточно сказать, что это *непрерывные* группы: каждое открытое множество элементов группы Ли допускает 1-1-отображение на открытое множество в R^n для некоторого n. Примером группы Ли является группа трансляций (сдвигов) пространства $R^n (x \mapsto x + a,$ $a = \text{const})$. Каждой точке a пространства R^n соответствует элемент этой группы, так что фактически группа трансляций взаимно-однозначно отображается на всё R^n. Групповым законом является обычное сложение: пара элементов $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ переходит в $\mathbf{c} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$, или, коротко, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Этот пример показывает, что не всегда символ $\cdot$ подходит для обозначения

групповой операции. Для абелевых групп, каковой является разобранная нами группа, удобнее употреблять знак «+».

Подгруппа S группы G — это совокупность элементов из G, сама образующая группу относительно той же бинарной операции. (Приставка «под» всегда будет обозначать подмножество, обладающее теми же свойствами, что и объемлющее множество. Мы столкнёмся с многими примерами «подобъектов»: векторные подпространства, подмногообразия, подалгебры Ли и подгруппы Ли.) Будучи группой, подгруппа должна содержать единичный элемент. Поскольку единичный элемент e группы единствен, любая подгруппа должна его содержать. В примере с группой подстановок легко придумать много подгрупп. Скажем, перестановки n объектов, не меняющие положения первого объекта, образуют подгруппу полной группы подстановок, так как: (i) тождественная перестановка e не двигает первый объект; (ii) если данная перестановка не двигает первый объект, то её обратная тоже такова; (iii) произведение двух таких перестановок опять же не двигает первый объект. Эта подгруппа совпадает с группой перестановок $(n-1)$ объектов. Пусть читатель попробует доказать, что множество всех *четных* перестановок также является подгруппой в группе всех перестановок, а нечётные перестановки подгруппы *не* образуют.

Наше утверждение, что определённая подгруппа группы перестановок n объектов «совпадает» с группой перестановок $n-1$ объектов, есть пример *изоморфизма групп*. Две группы G_1 и G_2 с бинарными операциями $\cdot$ и $*$ соответственно *изоморфны* (это означает, что они неотличимы с точки зрения их групповых свойств), если имеется 1-1-отображение f группы G_1 на G_2, сохраняющее групповую операцию:

$$f(x\cdot y)=f(x)*f(y). \tag{1.10}$$

Для нашего примера изоморфизм f тривиален: элемент подгруппы, переставляющий лишь последние $n-1$ объектов из n, переходит в ту же самую перестановку в группе перестановок $n-1$ объектов. Но изоморфизмы не всегда бывают тривиальными. Пусть G_1 — группа положительных вещественных чисел с операцией умножения, а G_2 — группа всех вещественных чисел с операцией сложения. (Почему это группы?) Тогда если x — число из G_1, то $f(x)=\log x$ определяет отображение $f: G_1 \to G_2$, удовлетворяющее (1.10):

$$\log(xy)=\log x+\log y.$$

Эти две группы изоморфны, и f — изоморфизм.

Другое полезное отношение между группами — это *групповой гомоморфизм*. Его определение похоже на определение изоморфизма, может лишь нарушаться взаимная однознач-

ность. Равенство (1.10) по-прежнему должно быть справедливым. Тривиальный гомоморфизм группы в себя — это отображение, переводящее каждый элемент группы в единичный элемент e. Менее тривиальный пример — гомоморфизм группы перестановок на мультипликативную группу, состоящую из двух элементов $\{1, -1\}$. Этот гомоморфизм переводит каждую чётную перестановку в 1, а каждую нечётную — в -1. Читателю следует проверить равенство (1.10) для этого примера, т. е. проверить, что композиция двух нечётных перестановок есть чётная перестановка, нечётной и чётной — нечётная и двух чётных — чётная.

1.5. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Множество V называется *векторным пространством* (над вещественными числами), если в нём задана бинарная операция, обозначаемая знаком „+", относительно которой оно образует абелеву группу (см. выше), и если определено умножение ($\cdot$) его элементов (векторов) на вещественные числа, удовлетворяющее следующим аксиомам (ниже $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — векторы, а a и b — вещественные числа):

(Vi) $a\cdot(\bar{x}+\bar{y})=(a\cdot\bar{x})+(a\cdot\bar{y})$,

(Vii) $(a+b)\cdot\bar{x}=(a\cdot\bar{x})+(b\cdot\bar{x})$,

(Viii) $(ab)\cdot\bar{x}=a(b\cdot\bar{x})$,

(Viv) $1\cdot\bar{x}=\bar{x}$.

Единичный элемент в группе V обозначается через $\bar{0}$ или просто 0. Помимо стандартных примеров векторных пространств отметим ещё, что векторными пространствами являются:

(i) множество всех $n\times n$-матриц, где „+" обозначает покомпонентное сложение, а „$\cdot$" обозначает покомпонентное умножение на вещественное число;

(ii) множество всех вещественных непрерывных функций $f(x)$, определённых на интервале $a\leqslant x\leqslant b$.

Обычно опускают точку, обозначающую умножение на число, и скобки, фигурирующие в аксиомах. Выражение вида

$$a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z} \tag{1.11}$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$. Множество элементов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\}$ пространства V *линейно-независимо*, если нельзя найти вещественные числа $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, не все равные нулю, такие что

$$a_1\bar{x}_1+a_2\bar{x}_2+\ldots+a_m\bar{x}_m=0 \tag{1.12}$$

Линейно-независимое множество называется *максимальным*, если добавление любого вектора из V делает его линейно-зависимым. По определению это означает, что любой вектор из V может быть представлен в виде линейной комбинации элементов максимального множества, так что максимальное множество образует *базис* пространства V. Например, если V — множество вещественных $n \times n$-матриц, то одним из базисов служит совокупность n^2 различных матриц, у которых все матричные элементы нулевые, кроме одного. В общем случае число векторов базиса — это *размерность* пространства V. (Все базисы имеют одинаковое число элементов, если оно вообще конечно.) Пусть векторы $\{\bar{x}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ образуют базис. Тогда произвольный вектор $\bar{y}$ представим в виде

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i. \tag{1.13}$$

Числа $\{a_i, i = 1, \ldots, n\}$ называются *компонентами* вектора $\bar{y}$ в этом базисе.

Подпространство векторного пространства V — это подмножество в V, само являющееся векторным пространством. (Сравните это определение с определением подгруппы в § 1.4.) В частности, оно должно включать в себя нулевой вектор и линейные комбинации любых своих элементов. Говорят, что некоторое множество векторов $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m\}$ *порождает* подпространство в V, образованное всевозможными линейными комбинациями

$$a_1\bar{y}_1 + a_2\bar{y}_2 + \ldots + a_m\bar{y}_m$$

(векторы $\bar{y}_i$ называются при этом *образующими*). Если $m < n$, то это подпространство обязательно собственное, т. е. не совпадает с V. В любом случае размерность подпространства равна максимальному числу линейно-независимых векторов среди образующих.

Пока что ничего не было сказано о скалярных произведениях или о длинах векторов. Эти понятия являются дополнительными; они не всегда оказываются полезными в конкретных приложениях теории векторных пространств, так что нет необходимости включать их в общее определение векторного пространства. Один из способов ввести эти понятия — определить *норму* на векторном пространстве. *Нормированное векторное пространство* V — это векторное пространство с заданной на нём вещественнозначной функцией n (т. е. функцией, которая сопоставляет каждому вектору $\bar{x}$ вещественное число $n(\bar{x})$, называемое его нормой), удовлетворяющей следую-

щим аксиомам:

(Ni) $n(\bar{x}) \geqslant 0$ для всех $\bar{x}$ из V, причём $n(\bar{x}) = 0$, если и только если $\bar{x} = 0$;

(Nii) $n(a\bar{x}) = |a| n(\bar{x})$ для всех a из R и $\bar{x}$ из V;

(Niii) $n(\bar{x} + \bar{y}) \leqslant n(\bar{x}) + n(\bar{y})$ для всех $\bar{x}$, $\bar{y}$ из V.

Есть много функций, удовлетворяющих этим аксиомам. Рассмотрим, например, само R^n как векторное пространство, где сложение векторов задаётся равенством

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ \ldots, \ x_n + y_n), \qquad (1.14)$$

а умножение на вещественное число — равенством

$$a\mathbf{x} = (ax_1, \ \ldots, \ ax_n). \qquad (1.15)$$

Тогда для трёх из четырёх функций расстояния, определённых в § 1.1, мы можем ввести норму как расстояние вектора от начала координат:

$$n(\mathbf{x}) = [(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ \ldots \ + (x_n)^2]^{1/2}, \qquad (1.16)$$

$$n'(\mathbf{x}) = [4(x_1)^2 + 0{,}1(x_2)^2 + \ \ldots \ + (x_n)^2]^{1/2}, \qquad (1.17)$$

$$n'''(\mathbf{x}) = \max(|x_1|, \ |x_2|, \ \ldots, \ |x_n|). \qquad (1.18)$$

Читателю предоставляется возможность проверить справедливость аксиом (Ni)—(Niii) для каждой из этих норм. Полезно также убедиться в том, что $d''(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *не* определяет нормы.

Первые две нормы отличаются от третьей тем, что они удовлетворяют еще одной, иногда весьма полезной аксиоме — *тождеству параллелограмма*:

(Niv) $[n(\bar{x} + \bar{y})]^2 + [n(\bar{x} - \bar{y})]^2 = 2[n(\bar{x})]^2 + 2[n(\bar{y})]^2$.

Норма, удовлетворяющая этому тождеству, позволяет определить билинейное симметрическое *скалярное произведение* двух векторов

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{4}[n(\bar{x} + \bar{y})]^2 - \frac{1}{4}[n(\bar{x} - \bar{y})]^2. \qquad (1.19)$$

Билинейность означает, что

$$(a\bar{x} + b\bar{y}) \cdot \bar{z} = a(\bar{x} \cdot \bar{z}) + b(\bar{y} \cdot \bar{z}) \qquad (1.20)$$

и

$$\bar{z} \cdot (a\bar{x} + b\bar{y}) = a(\bar{z} \cdot \bar{x}) + b(\bar{z} \cdot \bar{y}). \qquad (1.21)$$

Симметричность означает, что

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}. \qquad (1.22)$$

Кроме того, скалярное произведение является положительно-определённым, т. е.

$$\bar{x}\cdot\bar{x} \geqslant 0 \text{ и } \bar{x}\cdot\bar{x} = 0, \quad \text{лишь если } \bar{x} = \bar{0}. \tag{1.23}$$

Это очевидно, так как $\bar{x}\cdot\bar{x} = [n(\bar{x})]^2$.

Определённая выше норма $n(\mathbf{x})$ на R^n называется *эвклидовой нормой*. Векторное пространство R^n, рассматриваемое вместе с этой нормой, мы будем обозначать через E^n и называть n-мерным эвклидовым пространством. Важно уяснить себе различие между R^n и E^n: первое — это просто совокупность всех наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ без привлечения какого-либо расстояния или нормы. Полезность такого различения станет понятной в гл. 2.

Для того чтобы ввести скалярное произведение и доказать его билинейность и симметричность, нужны только аксиомы (Nii) и (Niv). Если допустить нарушение свойств (Ni) и (Niii), то мы получим *псевдонорму*; скалярное произведение вектора с самим собой в этом случае не обязано быть положительным. Примером физической теории, использующей псевдонорму, является специальная теория относительности. Ниже мы рассмотрим её более или менее подробно.

Хотя мы определили только векторные пространства над вещественными числами, не составляет труда определить их и над комплексными числами, просто дозволив числам a и b в (Vi)—(Viv) быть комплексными. Тогда компоненты векторов будут комплексными. Такие векторные пространства часто используются в квантовой механике.

1.6. АЛГЕБРА КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

Линейное преобразование T векторного пространства V — это отображение V на себя, удовлетворяющее свойству линейности (ср. с (1.20) и (1.21))

$$T(a\bar{x} + b\bar{y}) = aT(\bar{x}) + bT(\bar{y}). \tag{1.24}$$

Если в V задан базис $\{\bar{e}_i, i = 1, \ldots, n\}$, то

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i, \tag{1.25}$$

$$T(\bar{x}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\bar{e}_j, \tag{1.26}$$

где каждый вектор $T(\bar{e}_i)$ мы заменим его разложением в данном базисе $\sum_{j=1}^{n} T_{ij}\bar{e}_j$. Числа T_{ij} называются компонентами (или координатами) преобразования T (в базисе $\{\bar{e}_i\}$); они образуют квадратную $n\times n$-матрицу.

Отметим весьма важное алгебраическое соотношение, которое будет часто использоваться в дальнейшем:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left(\sum_{j=1}^{m} B_{ij} C_j \right) = \sum_{j=1}^{m} C_j \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ij} A_i \right). \qquad (1.27)$$

Другими словами, порядок суммирования не играет никакой роли. Поэтому обычно это выражение записывают в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_i B_{ij} C_j \text{ или просто } \sum_{i,\,j} A_i B_{ij} C_j, \qquad (1.28)$$

подчеркивая тем самым, что эта сумма является просто суммой соответствующих произведений по всевозможным комбинациям индексов.

Два последовательных линейных преобразования T и U, действующих на пространстве V, дают новое преобразование UT:

$$UT(\bar{x}) = U(T(\bar{x})) = U\left(\sum_{i,\,j} a_i T_{ij} \bar{e}_j \right) = \sum_{ijk} a_i T_{ij} U_{jk} \bar{e}_k$$

$$= \sum_{ik} a_i \left(\sum_{j} T_{ij} U_{jk} \right) \bar{e}_k. \qquad (1.29)$$

Отсюда вытекает, что компоненты произведения UT имеют вид

$$\sum_{j} T_{ij} U_{jk}. \qquad (1.30)$$

Важно усвоить, что если мы запишем T_{ij} в виде матрицы (индекс i нумерует строки, а j — столбцы) и точно так же запишем U_{jk}, то сумма (1.30) в точности совпадёт с выражением для *матричного* произведения соответствующих матриц. В общем случае матричное произведение двух матриц A_{ij} и B_{ij} имеет вид

$$(AB)_{ik} = \sum_{j} A_{ij} B_{jk} = \sum_{j} B_{jk} A_{ij}, \qquad (1.31)$$

$$(BA)_{ik} = \sum_{j} B_{ij} A_{jk} = \sum_{j} A_{jk} B_{ij}. \qquad (1.32)$$

Отметим, что третье выражение в равенстве (1.31) равно второму, поскольку A_{ij} и B_{ij} суть просто числа, а умножение чисел коммутативно. Сравнивая третий член в равенстве (1.31) со вторым в равенстве (1.32), мы видим, что важен не порядок сомножителей, а взаимное расположение индексов суммирования и свободных индексов. Различие этих двух выражений означает, что матричное умножение, вообще говоря, не коммутативно.

Матричные элементы *транспонированной* к A матрицы A^{T} имеют вид

$$(A^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji}. \tag{1.33}$$

(Если матрица A комплексная, то её сопряженная A^* определяется равенством $(A^*)_{ij} = \bar{A}_{ji}$, где черта обозначает комплексное сопряжение.) *Единичная* матрица I имеет всюду на главной диагонали единицы, а вне главной диагонали — нули; это записывается в виде

$$(I)_{ij} = \delta_{ij}, \tag{1.34}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. *Тождественное преобразование* переводит, по определению, каждый вектор $\bar{x}$ в себя. Его компоненты в любом базисе равны δ_{ij}. Матрица A^{-1}, *обратная* к матрице A, определяется равенством

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I. \tag{1.35}$$

Не каждая матрица имеет обратную; очевидным примером является нулевая матрица. Если обратная матрица существует, то она единственна. Ясно, что A будет обратной для A^{-1}. Если A^{-1} существует, то матрица A называется *невырожденной* (в противном случае — *вырожденной*). Множество всех невырожденных $n \times n$-матриц образует группу относительно операции матричного умножения. Её единицей является единичная матрица I. Эта группа служит очень важным примером группы Ли и обозначается через $GL(n, R)$; мы изучим её детально в гл. 3.

Определитель (*детерминант*) 2×2-матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

обозначаемый через $\det(A)$, определяется равенством

$$\det(\mathrm{A}) = ad - bc. \tag{1.36}$$

Определитель $n \times n$-матрицы определяется индуктивно при помощи следующего *правила разложения по строке. Алгебраическое дополнение* элемента a_{ij} матрицы A, обозначаемое через a^{ij}, — это число, равное взятому с коэффициентом $(-1)^{i+j}$ определителю $(n-1)\times(n-1)$-матрицы, получающейся из матрицы A вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит a_{ij}. Так, например, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

алгебраическое дополнение элемента a равно $ek - fh$, а элемента f равно $bg - ah$. Определитель матрицы A определяется правилом

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a^{ij} \text{ (для любого фиксированного } i). \quad (1.38)$$

Для матрицы (1.37), беря $i = 1$, получим

$$\det(A) = a(ek - fh) + b(fg - dk) + c(dh - eg),$$

а взяв $i = 2$, будем иметь

$$\det(A) = d(hc - bk) + e(ak - cg) + f(bg - ah);$$

оба эти выражения совпадают. Это правило выглядит весьма загадочным при том способе изложения, который мы избрали. Оно станет более понятным, когда мы снова вернёмся к нему в § 4.12.

Каждую из строк (или столбцов) $n \times n$-матрицы можно считать координатами вектора в некотором n-мерном пространстве. Определитель матрицы обращается в нуль, если и только если n векторов, определённых его строками (или столбцами), линейно-зависимы. Это вытекает из ряда других свойств определителя: если одну строку умножить на константу λ, то весь определитель умножится на λ; определитель не изменится, если какую-нибудь одну строку заменить на поэлементную сумму этой строки и произвольного кратного любой другой строки; при перестановке двух любых строк определитель меняет знак. Все эти свойства остаются верными, если заменить всюду «строка» на «столбец». Они опять же станут более понятными после изучения § 4.12.

Построим по данной матрице A матрицу B, полагая

$$b_{ij} = a^{ji}/\det(A). \quad (1.39)$$

Из (1.38) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = 1 \text{ для любого фиксированного } i.$$

Оказывается (вы можете убедиться в этом «экспериментально»), что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik};$$

другими словами, матрица B, задаваемая формулой (1.39), является обратной для матрицы A. Следовательно, матрица A невырожденна, если и только если $\det(A) \neq 0$.

Следом матрицы A называется сумма её диагональных элементов:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_i a_{ii}. \tag{1.40}$$

Преобразование подобия матрицы A при помощи невырожденной матрицы B — это отображение $A \mapsto B^{-1}AB$. Приведём некоторые полезные формулы, которые могут быть доказаны на основе данных выше определений:

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}, \tag{1.41}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \tag{1.42}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{1.43}$$

$$\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A), \tag{1.44}$$

$$\det(B^{-1}AB) = \det(A), \tag{1.45}$$

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A). \tag{1.46}$$

Говорят, что $n \times n$-матрица A имеет *собственное значение* λ и (отвечающий ему) *собственный вектор* $\bar{V} \neq 0$, если

$$A(\bar{V}) = \lambda \bar{V}, \tag{1.47}$$

где в левой части равенства A действует как линейное преобразование на $\bar{V}$. В координатной форме это равенство запишется в виде n уравнений

$$\sum_j (a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) V_j = 0. \tag{1.48}$$

Они имеют ненулевое решение $\bar{V}$, если и только если

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{1.49}$$

Собственные значения A являются решениями уравнения (1.49), которое, очевидно, является уравнением n-й степени по λ. Каждому вещественному решению λ отвечает собственный вектор. Если некоторое решение комплексное, то отвечающих ему вещественных собственных векторов нет, так что в случае, когда $\bar{V}$ пробегает вещественное векторное пространство, имеется фундаментальное различие между вещественными собственными значениями и комплексными. Если же рассматриваемое векторное пространство — и матрица A — комплексные, то никакой разницы между вещественными и комплексными решениями нет. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — все n корней уравнения (1.49) (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Обратим внимание на следующие

три важных результата:

$$\{\text{собственные значения } A^{\mathrm{T}}\} = \{\text{собственные значения } A\}, \quad (1.50)$$

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n, \quad (1.51)$$

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n. \quad (1.52)$$

Последние два утверждения можно доказать, явно расписав многочлен в левой части (1.49). Первое вытекает из (1.46).

1.7. БИБЛИОГРАФИЯ

В перечисленных ниже руководствах материал излагается примерно на том уровне сложности, который принят в данной книге. Назначение этого списка — подвести читателя к уровню излагаемого в книге материала; он никоим образом не является исчерпывающим перечнем рекомендуемых книг для чтения.

Элементы математического анализа: G. B. Thomas, Calculus and Analytic Geometry (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960).

Механика: K. R. Symon, Mechanics (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1953), или H. Goldstein, Classical Mechanics (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950) [имеется перевод: Голдстейн Г. Классическая механика. 2-е изд. — М.: Наука, 1975] или Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1965.

Термодинамика: M. W. Zemansky, Heat and Thermodynamics (McGraw-Hill, New York, 1957) или E. Fermi, Thermodinamics (Dover, New York, 1956) [имеется перевод: Ферми Э. Термодинамика. — Харьков: 1973].

Электродинамика: J. R. Reitz & F. J. Milford, Foundation of Electromagnetic Theory (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960) или J. B Marion, Classical Electromagnetic Radiation (Academic Press, New York, 1965).

Специальная теория относительности: A. P. French, Special Relativity (Nelson, London, 1968) или E. F. Taylor & J. A. Wheeler, Spacetime Physics (Freeman, San Francisco, 1965).

Квантовая механика: L. I. Schiff, Quantum Mechanics (McGraw-Hill, New York, 1955).

Материал этой главы может быть более глубоко изучен по следующим книгам:

R. A. Dean, Elements of Abstract Algebra (Wiley, New York, 1967); W. Rudin. Principles of Mathematical Analysis (McGraw-Hill, New York, 1964) [имеется перевод: Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1966];

E. W. Packel, Functional Analysis, a Short Course (International Textbook Co., Glasgow, 1974);

F. Riesz & B. Sz.-Nagy, Functional Analysis (Ungar, New York, 1955) [имеется перевод: Рисс Ф, Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979].

A. Wallace, Differential Topology: First Steps (Benjamin, Reading, Mass., 1968) [имеется перевод в кн.: Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. — М.: Мир, 1972].

Приведём теперь список основных руководств, в которых излагается материал последующих глав — излагается, как правило, более глубоко и строго. Ниже мы будем ссылаться на эти руководства по фамилиям авторов.

Y Choquet-Bruhat, C DeWitt-Moiette & M Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds and Physics (North Holland, Amsterdam, 1977) Исчерпывающий курс, рассчитанный на математически подкованных физиков Особенно хорошо изложены дифференциальные уравнения

R Abraham & I E Marsden, Foundations of Mechanics, rev 2nd ed (Benjamin/Gummings, Reading, Mass, 1978) Эта книга, как видно из ее названия, охватывает меньше материала, чем предыдущая, зато с соответственно большей глубиной Отличается вниманием к глобальным проблемам, а также обширной библиографией Второе издание существенно расширено по сравнению с первым

F W Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups (Scott, Foresman, Glenview, Ill, 1971) Доступное для студентов старших курсов введение в теорию дифференцируемых многообразий и групп Ли. Особенно сильны разделы, посвященные группам Ли и теории когомологий.

M Spivak, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, four volumes (Publish or Perish, Boston 1970) Как показывает само название, книга рассчитана на аспирантов-математиков Написана в свободной манере, местами с юмором много упражнений, разбирается много подробностей

Есть и другие заслуживающие внимания книги по дифференциальной геометрии Для первоначального знакомства полезны N J Hicks, Notes on Differential Geometry (D Van Nostrand, New York, 1965) или R L Bishop & S I Goldberg, Tensor Analysis on Manifolds (Macmillan, London, 1968). В том же «современном» духе, и настоящая книга, написана книга C T J Dodson & T Poston, Tensor Geometry (Pitman, London, 1977). В ней обстоятельно обсуждаются многие вопросы, которых мы лишь касаемся, правда ничего не говорится об общих производных Ли или исчислении дифференциальных форм Читатель, которому прыжок от данной книги к, скажем,, Choquet-Bruhat el al покажется слишком далеким, может сперва попробовать почитать первую половину книги Dodson & Poston. Заслуженным авторитетом пользуются монографии S Kobayashi & K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, two volumes (Interscience, New York, 1963 and 1969) [имеется перевод Кобаяси Ш, Номидзу К Основы дифференциальной геометрии — М Наука, 1981] и J A Schouten, Ricci Calculus (Springer, Berlin, 1954), последняя написана в несколько старомодных обозначениях

Не удивительно, что одни из лучших изложений дифференциальной геометрии для физиков содержатся в руководствах по общей теории относительности Рекомендую книгу C W Misner, K S Thorne & J A Wheeler, Gravitation (Freeman, San Francisco, 1973) [имеется перевод Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж Гравитация — М Мир, 1976], в которой дифференциальная геометрия излагается на протяжении нескольких глав в том же духе и примерно в тех же обозначениях, что и у меня здесь На более высоком уровне сложности и более сжато написана глава по дифференциальной геометрии в книге S W Hawking & G F R Ellis, The Large Scale Structure of Space — Time (Cambridge University Press, 1973). Введением широкого диапазона является статья «Дифференциальная геометрия», написанная Ч Мизнером для сборника Relativity, Groups and Topology, ed C DeWitt & B DeWitt (Gordon & Breach, New York, 1964) Другое полезное введение — статья Б Шмидта в сборнике Relativity, Astrophysics and Cosmology, ed W Israel (Reidel, Dordrecht, 1973) Также рассчитаны на физиков книги R Hermann, Differential Geometry and the Calculus of Variations (Academic Press, New York, 1968), D Lovelock & H Rund, Tensors, Differential Forms and Variational Principles (Wiley, New York, 1975), H Flanders, Differential Forms (Academic Press New York, 1963), Von Westenholz Differential Forms in Mathematical Physics (North-Holland, Amsterdam, 1979).

2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ТЕНЗОРЫ

Трудно представить себе физическую задачу, в которой не приходится рассматривать какой-либо пространственный континуум. Это может быть физическое трёхмерное пространство, четырёхмерное пространство-время, фазовое пространство (для задач из классической или квантовой механики), пространство всех термодинамически равновесных состояний или даже ещё более абстрактное пространство. Все эти пространства обладают различными геометрическими свойствами, но есть в них и нечто общее, и это общее связано с тем, что они являются непрерывными пространствами в отличие от, скажем, решёток, состоящих из изолированных точек. Дифференциальная геометрия именно потому важна для современной физики, что она изучает как раз эти свойства, общие для всех таких пространств. Наиболее фундаментальные из этих свойств кладутся в основу определения дифференцируемого многообразия — точного математического эквивалента для слова «пространство».

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Как и в § 1.1, мы обозначаем через R^n совокупность всех наборов из n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество (состоящее из «точек») M называется *многообразием*, если каждая его точка имеет открытую окрестность, допускающую непрерывное 1-1-отображение (называемое координатным) на открытое множество в R^n для некоторого n. (Читателю, который не вполне уверен, что смысл выражения «1-1-отображение *на*» ему понятен, стоит заглянуть в § 1.2.) Попросту говоря, M локально «похоже» на R^n. *Размерность* многообразия M — это, разумеется, число n. Важно, что в определении участвуют только открытые множества, а не всё M или всё R^n, так что мы не налагаем никаких ограничений на глобальную топологию M. Это станет ясно при разборе примера со сферой в § 2.2. Обратим внимание, что от отображения требуется только взаимная однозначность и не требуется сохранения длин, углов или других геометрических величин. На этом уровне геометрии понятие длины просто даже не опре-

делено, и мы встретимся в дальнейшем с примерами физических приложений, в которых и не нужно вводить понятие расстояния между точками наших многообразий. На этом элементарном («примитивном») уровне геометрии мы лишь хотим добиться того, чтобы локальная топология нашего пространства (как она описана в § 1.1) была такой же, как и для R^n. Многообразие— это пространство с такой топологией.

По определению координатное отображение сопоставляет точке P многообразия M набор из n чисел $(x_1(P), \ldots, x_n(P))$

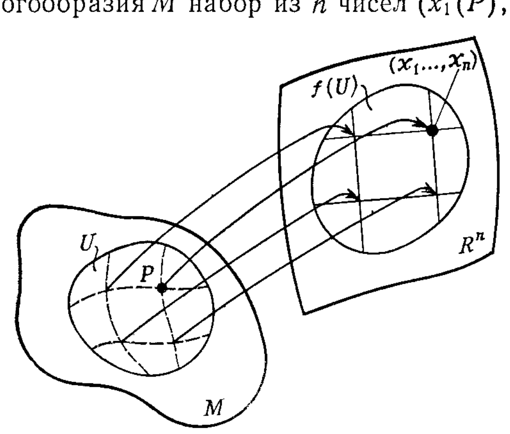


Рис. 2.1. Отображение f взаимно-однозначно отображает область U из M на область $f(U)$ из R^n. Это отображение сопоставляет каждой точке P однозначно определённый набор n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тем самым в U возникает система координат, изображённая при помощи штриховых линий, являющихся образами при отображении f^{-1} стандартной координатной сетки в R^n.

(см. рис. 2.1). Эти числа $x_1(P), \ldots, x_n(P)$ называются *координатами* P относительно этого отображения. Одна из возможных точек зрения на понятие n-мерного многообразия — это просто считать его множеством, которое может быть задано n независимыми координатами в некоторой окрестности своей точки: именно, эти координаты на самом деле *определяют* требуемое отображение в R^n. В дальнейшем мы будем использовать стандартные обозначения для координат, нумеруя их верхними индексами: $x^1(P), x^2(P), \ldots, x^n(P)$ — это n координат точки P (а не степени $x(P)$!) относительно координатного отображения.

В результате предшествующего обсуждения мы получили некое общее представление о том, что такое многообразие, но для того, чтобы получить что-нибудь большее, нужно рассмотреть более внимательно свойства координатных отображений. Пусть f — инъективное отображение некоторой окрестности U точки P из M на открытое множество $f(U)$ в R^n.

Как мы уже отмечали выше, окрестность U не обязана содержать *всё* M (как мы увидим в § 2.2, в случае сферы она и *не может* содержать всю сферу), так что должны быть и другие окрестности со своими собственными отображениями, причём каждая точка из M должна лежать по крайней мере в одной такой окрестности. Пара «окрестность плюс её отображение» называется *картой*. Легко видеть, что эти открытые окрестности должны перекрываться, раз любая точка из M должна содержаться по крайней мере в одной из них: именно эти перекрытия важны для дальнейшей детализации понятия многообразия (см. рис. 2.2). Пусть окрестность V частично покрывает окрестность U, и пусть задано отображение g окрестности V на открытую область в R^n. Эта открытая область может считаться совершенно отличной от той, на которую f отображает окрестность U. Пересечение V и U открыто (по аксиоме (Ti) из § 1.1) и задаётся двумя различными системами координат, отвечающими отображениям f и g. Имеется, стало быть, некоторая связь между этими координатными системами. Чтобы её найти, возьмём точку в образе перекрытия относительно f (т. е. точку из R^n), скажем точку $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ на рис. 2.3. Отображение f обладает обратным f^{-1}, поэтому имеется единственная точка S, лежащая в перекрытии, которая имеет именно эти числа своими координатами относительно отображения f. Пусть теперь g сопоставляет S другую точку в R^n, скажем $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. (Тем самым построено отображение $R^n \to R^n$ — композиция $g \cdot f^{-1}$.) В результате мы получаем функциональные соотношения (*преобразование координат*)

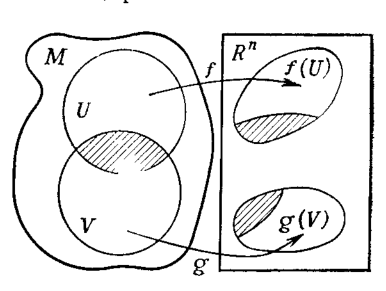


Рис. 2.2. Окрестности U и V из M перекрываются (затушёванная область). Соответствующие координатные отображения f и g в R^n дают в зоне перекрытия два различных отображения (а, следовательно, две системы координат). Соответствие между этими координатами характеризует класс гладкости многообразия.

$$
\begin{aligned}
y^1 &= y^1(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\
y^2 &= y^2(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^n &= y^n(x^1, x^2, \ldots, x^n).
\end{aligned}
$$

Если все частные производные порядка не выше k всех этих функций $\{y^i\}$ по переменным $\{x^i\}$ существуют и непрерывны, то отображения f и g (более точно, карты (U, f) и (V, g)) называются *C^k-согласованными*. (Обозначение C^k было вве-

дено в § 1.2 для дифференцируемости.) Если можно построить целую систему карт (называемую, вполне уместно, *атласом*) так, чтобы каждая точка многообразия M содержалась по крайней мере в одной окрестности и любая карта была C^k-согласована с любой другой, с ней перекрывающейся, то многообразие M называется *C^k-многообразием*. Многообразия класса C^1 (а тем самым и класса C^k при $k > 1$) называются *дифференцируемыми* (или *гладкими*) *многообразиями*.

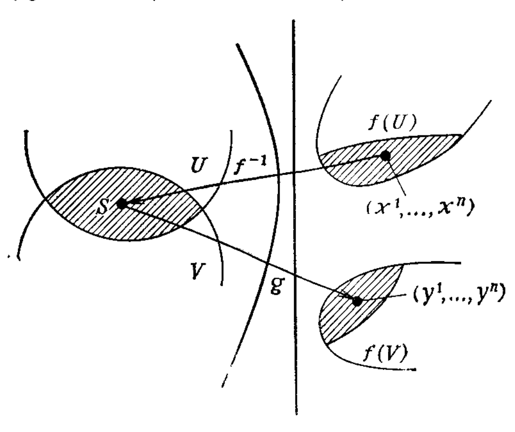


Рис. 2.3. Увеличение рис. 2.2, демонстрирующее, как перекрытие порождает отображение R^n в R^n, являющееся композицией отображений f^{-1} и g (и обозначаемое через $g \circ f^{-1}$).

Дифференцируемость многообразия позволяет снабдить его чрезвычайно богатой структурой: на нём можно определить тензоры, дифференциальные формы и производные Ли. Эта дифференциальная структура и будет для нас главным предметом изучения. Напомним, что мы не вводили понятия расстояния на M, поэтому у нас нет пока никаких представлений о «форме» или «кривизне» M. Мы знаем только, что локально оно гладкое, и именно это нужно для дальнейшего.

В большинстве приложений мы будем иметь дело с C^∞-многообразиями, но обычно это не так уж и необходимо. Иногда нам будет удобно предположить многообразие аналитическим (класса C^ω; функции $\{y^i\}$ — аналитические функции от $\{x^i\}$); как уже упоминалось в § 1.2, предполагать аналитичность всюду, где только удобно, вполне в духе физиков. Наша точка зрения такова, что при первоначальном изучении этого предмета лучше наложить более жёсткие ограничения на многообразия, чтобы увидеть, в чём же суть дифференциальной геометрии. После того как изучающий лучше освоится с предметом, он может подумать о том, как можно было бы ослабить эти ограничения. В соответствии с такой

точкой зрения читатель этой книги всюду должен иметь в виду, что все многообразия в этой книге дифференцируемы столько раз, сколько нужно для наших рассуждений.

2.2. СФЕРА КАК МНОГООБРАЗИЕ

Одним из простейших примеров многообразия, иллюстрирующим важность того обстоятельства, что допускается более чем одна карта, служит сфера (поверхность шара). Рассмотрим двумерную сферу (обозначаемую через S^2) — множество

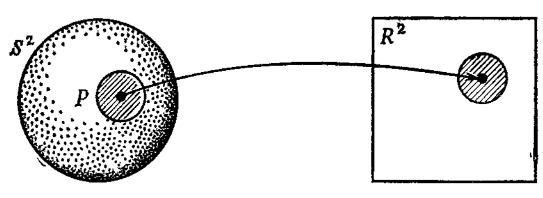


Рис. 2.4. Маленькая окрестность точки P на сфере S^2 взаимно-однозначно отображается на круг в R^2.

точек в R^3, для которых $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=\text{const}$. Каждая её точка имеет достаточно малую окрестность, допускающую 1-1-отображение на круг в R^2 (см. рис. 2.4). Ясно, что

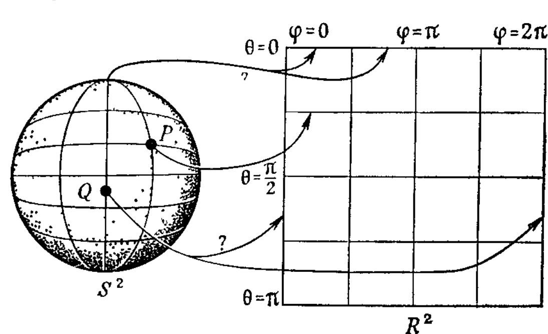


Рис. 2.5. Обычные сферические координаты задают отображение из S^2 в R^2, "хорошее" для обыкновенных точек типа P. А что является образом северного полюса? И какую из двух указанных точек считать образом точки Q, лежащей на меридиане $\varphi=0$?

соответствующее отображение никоим образом не сохраняет длины или углы. В качестве конкретного примера такого отображения рассмотрим обычные сферические координаты $\theta\equiv x^1$, $\varphi\equiv x^2$. На первый взгляд может показаться, что вся сфера отображается на прямоугольник $0\leqslant x^1\leqslant\pi$, $0\leqslant x^2\leqslant 2\pi$ (рис. 2.5). Однако при более внимательном рассмотрении видно, что здесь что-то не так. Во-первых, отображение

портится в полюсе $\theta = 0$, где одна точка «отображается» в целую линию $x^1 = 0$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 2\pi$. Так что в полюсе, собственно, никакого отображения и нет. Второй трудностью является то, что точки, для которых $\varphi = 0$, «отображаются» в два различных места: $x^2 = 0$ и $x^2 = 2\pi$, чего опять-таки не должно быть для настоящего отображения. Выйти из этого затруднения можно, лишь ограничив координатное отображение на открытую область $0 < x^1 < \pi$, $0 < x^2 < 2\pi$. Тогда оба полюса и соединяющая их полуокружность $\varphi = 0$ устраняются. Поэтому нужно хотя бы два отображения, чтобы покрыть сферу полностью. Второе может быть, скажем, другой сферической системой координат, у которой меридиан $\varphi = 0$ образует часть экватора первой системы. Ясно, что каждая точка на сфере лежит по крайней мере в одной из двух этих карт. Функции перекрытия, выражающие координаты второй системы через координаты первой, довольно сложны, но совершенно очевидно, что они аналитичны. Поэтому сфера является аналитическим многообразием.

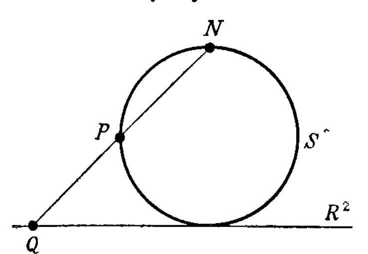


Рис. 2.6. Стереографическая проекция S^2 в R^2. Сфера с выколотым северным полюсом N является открытым множеством, и это множество отображается на всё R^2. В самóй точке N отображение перестает действовать

Другим, более «хорошим» отображением сферы S^2 на область в R^2, портящимся только в одной точке, является так называемая стереографическая проекция сферы на плоскость, изображённая в вертикальном сечении на рис. 2.6. Сфера касается плоскости, и из полюса N на сфере, диаметрально противоположного точке касания, проводится прямая. Эта прямая пересекает сферу в точке P, а плоскость — в точке Q. Этим и задаётся координатное отображение: P отображается в Q; другими словами, координатами точки P на сфере являются координаты точки Q на R^2. Это отображение взаимно-однозначно всюду, кроме N, поскольку, когда проведённая через N прямая делается горизонтальной (P достигает N), точка Q уходит на бесконечность. В каком бы направлении ни уходила точка Q на бесконечность, точка P будет стремиться к N. Таким образом, N отображается на всю «бесконечность», и вблизи N нужно использовать другую координатную систему. Нет никакого координатного отображения, которое годилось бы для всей сферы S^2. Обратим внимание, что это обстоятельство связано только с глобальной топологией S^2: всё сказанное выше справедливо и для поверхности кегли или бутылки, получающихся деформацией из S^2. На-

против, двумерная внутренность кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями в R^2, *может* быть покрыта одной координатной системой. Попробуйте её найти!

2.3. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ

Полезность понятия многообразия заключается в его общности: многообразиями оказываются такие множества, которые, не будь этого понятия, никому бы и в голову не пришло считать пространствами. По определению *любое* множество M, допускающее непрерывную параметризацию, является многообразием, размерность которого равна числу независимых параметров. Например:

(i) Совокупность всех вращений твёрдого тела в трёхмерном пространстве является многообразием, поскольку она может быть непрерывно параметризована тремя «углами Эйлера» (см. Goldstein, 1950).

(ii) Совокупность всех лоренцевых преобразований, задаваемых переходом к движущейся системе отсчета, устроена как трёхмерное многообразие: параметрами служат три компоненты скорости движения.

(iii) Для N частиц величины, определяющие их положения ($3N$ величин) и скорости ($3N$ величин), задают точку в $6N$-мерном многообразии, называемом фазовым пространством.

(iv) Если задано уравнение (алгебраическое или дифференциальное) для величины y как функции от независимой переменной x, то можно ввести структуру многообразия на множестве *всех* пар (y, x): каждое частное решение есть кривая на этом многообразии. Этот пример легко обобщается на случай произвольного числа зависимых и независимых переменных.

(v) Особенно часто встречающимся примером многообразия служит векторное пространство, определение которого было дано в § 1.5. (Мы рассматриваем здесь лишь векторные пространства над вещественными числами.) Для того чтобы убедиться в том, что векторное пространство является многообразием, построим отображение его в некоторое R^n. Пусть векторное пространство n-мерно, выберем в нём произвольный базис $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$. Тогда любой вектор $\bar{y}$ представляется в виде линейной комбинации

$$\bar{y} = a_1\bar{e}_1 + \ldots + a_n\bar{e}_n. \tag{2.1}$$

Но $\bar{y}$ есть точка V; тем самым установлено отображение из V в R^n, $\bar{y} \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$. На самом деле каждой точке из R^n отвечает при этом отображении единственный вектор из V, так что V не только целиком покрывается одной координат-

ной системой, которую мы построили, но просто совпадает как многообразие с R^n. На языке теории групп (§ 1.4) V и R^n изоморфны. Это важный результат. Он означает, что каждое векторное пространство можно, когда это удобно, считать просто пространством R^n.

(vi) Разобранный выше пример (i) служит примером группы Ли, определение которой мы теперь в состоянии дать. *Группа Ли* G — это группа, являющаяся к тому же C^∞-многообразием, причём групповая операция должна индуцировать C^∞-отображение этого многообразия в себя. Это означает следующее. Возьмём любой элемент a группы. Этот элемент индуцирует отображение G в себя, при котором любой элемент b из G переходит в ba, $b \mapsto ba$. Требуется, чтобы это отображение было отображением класса C^∞; на координатном языке это означает, что координаты точки ba должны быть C^∞-функциями от координат точки b. В действительности это требование есть требование согласованности: оно гарантирует согласованность структуры многообразия с групповой структурой. В примере (i) совокупность всех вращений твёрдого тела образует группу: нетрудно показать, что её групповая структура согласована со структурой трёхмерного многообразия. (Эта группа Ли называется группой $SO(3)$.) Данное определение группы Ли может показаться поначалу чересчур абстрактным и сухим: оно сделается более живым после того, как мы разберём свойства групп Ли в гл. 3. Простым примером группы Ли является R^n. Это — векторное пространство (см. пример (v) выше) и тем самым группа, а также и многообразие: фактически R^n служит простейшим примером группы Ли.

2.4. О СВОЙСТВАХ МНОГООБРАЗИЙ «В ЦЕЛОМ»

Поскольку каждое многообразие локально устроено как некоторое R^n, любые два многообразия одинаковой размерности (и одного класса гладкости) локально неразличимы на данном уровне дифференциальной геометрии. Ситуация в корне меняется при переходе к рассмотрению глобальных структур, как это видно из сопоставления S^2 с R^2, проведенного в § 2.2. Следовательно, многообразия делятся на различные классы в соответствии с их глобальными свойствами. Например, поверхность сферы и поверхность мелка имеют одинаковую глобальную структуру. Хотя ни одну из них нельзя отобразить на R^2, для каждой имеется прекрасное 1-1-отображение на другую, как это показано на рис. 2.7. (Строго говоря, мелок должен иметь гладкие края для того, чтобы его поверхность можно было отождествить с S^2 как C^∞-многообразие.) Такое отображение непосредственно из

одного C^∞-многообразия M в другое N, являющееся взаимно-однозначным и класса C^∞ (отображение принадлежит к классу C^∞, если координаты точки из N являются бесконечно дифференцируемыми функциями от координат точки-прообраза в M) и обладающее тем свойством, что его обратное тоже является C^∞-отображением, называется *диффеоморфизмом* M на N. Многообразия M и N, для которых такое отображение существует, называются *диффеоморфными* Поверхность чайной чашки диффеоморфна тору (поверхности бублика), поскольку в каждой из этих поверхностей есть ровно одна дырка· каждую из них можно гладко продеформировать в другую

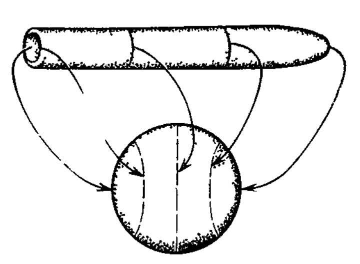


Рис 2 7 Поверхность гладкого (класса C^∞) цветного мелка можно взаимно однозначно отобразить на сферу S^2 Представленное на рисунке отображение определено глобально, а не только на каком нибудь куске поверхности Оно является диффеоморфизмом (как и обратное к нему)

Большая часть результатов, излагаемых в этой книге, относится к локальной геометрии, зависящей только от дифференциальной структуры Но нам встретятся и такие ситуации, например при изучении расслоений и интегрирования функций, где глобальные свойства многообразия весьма существенны

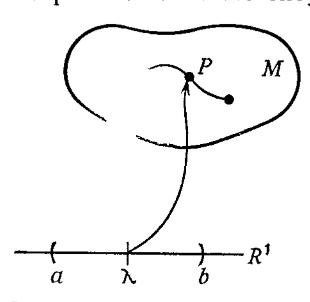


Рис 2 8 Кривая в M — это отображение из R_1 в M Точка λ из R^1 переходит в точку P из M Образом открытого интервала с концами a и b в R^1 является нарисованная линия в M

2 5. КРИВЫЕ

Для нас будут очень важны кривые на многообразиях. Общепринятым является представление о кривой как о непрерывном ряде точек в M Нам здесь удобнее дать несколько иное определение· кривая — это (дифференцируемое) отображение открытого подмножества из R^1 в M (см рис 2 8). Таким образом, каждой точке из R^1 (являющейся вещественным числом, которое мы обозначим через λ) отвечает точка из M, называемая *точкой-образом*, отвечающей значению λ. Совокупность всех точек-образов и есть то, что понимается обычно под кривой, но согласно нашему определению каждой точке присваивается ещё некоторое значение λ Ясно, что речь идёт о *параметризованной* кривой, с параметром λ Поэтому

две кривые различны, даже если они имеют совпадающие образы в M, но одинаковым точкам отвечают различные значения параметров. Как и раньше, под «дифференцируемым» мы понимаем такое отображение, для которого координаты точек-образов $\{x^i(\lambda),\ i=1, \ldots, n\}$ являются дифференцируемыми функциями от λ.

2.6. ФУНКЦИИ НА M

Функция на M — это правило, сопоставляющее каждой точке из M вещественное число (называемое *значением* функции). Если некоторая область в M отображается при помощи гладкого координатного отображения на область в R^n, то функция на M превращается в функцию на R^n (см. рис. 2.9).

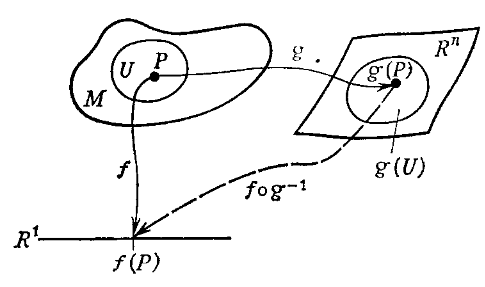


Рис. 2.9. Функция f на M есть отображение из M в R^1. Координатное отображение g из области U многообразия M, содержащей P, на область $g(U)$ в R^n обратимо. Составное отображение $f \circ g^{-1}$ переводит R^n в R^1, т. е. является функцией на R^n. Это просто выражение $f(P)$ через координаты точки P.

Если эта функция на R^n дифференцируема, то говорят, что она является *дифференцируемой функцией на многообразии* M. То же можно выразить по-другому: абстрактно говоря, наша функция может быть записана в виде $f(P)$, где P — точка из M. Но P задана своими координатами, так что нашу функцию можно записать в виде $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Если это выражение дифференцируемо по своим аргументам, то функция называется дифференцируемой. Сами координаты, конечно же, являются непрерывными и бесконечно дифференцируемыми функциями. Например, x^3 — это функция, для которой $x^3(P)$ есть значение третьей координаты точки P.

Начиная с этого места мы будем избегать упоминаний о координатных отображениях из M в R^n, хотя и будем иногда упоминать о координатах (задающих эти отображения). Цель нашего изучения координатных отображений состояла в том, чтобы по возможности строго сформулировать основные понятия. Отныне нас будет больше интересовать использование

этих понятий для построения дифференциальной структуры на многообразиях, поэтому будем всюду в дальнейшем предполагать, что на рассматриваемом многообразии можно ввести координаты $\{x^i,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$ и что любая система достаточно гладких функций $y^i = y^i(x^j)$, которая локально обратима (т. е. якобиан которой отличен от нуля, см. § 1.2), определяет допустимое преобразование к новым координатам $\{y^i,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$.

2.7. ВЕКТОРЫ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Рассмотрим кривую, проходящую через точку P многообразия M, задаваемую уравнениями $x^i = x^i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$. Далее, возьмём дифференцируемую функцию $f(x^1, \ldots, x^n)$ (сокращенно $f(x^i)$) на M. В каждой точке кривой определено значение функции f. Таким образом, на кривой возникает дифференцируемая функция $g(\lambda)$, дающая значение f, которое та принимает в точке, отвечающей параметру λ:

$$g(\lambda) = f(x^1(\lambda),\ \ldots,\ x^n(\lambda)) = f(x^i(\lambda)).$$

Дифференцируя, получаем по цепному правилу

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial x^i}\,. \tag{2.2}$$

Это равенство справедливо для любой функции g, так что мы можем написать

◆ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{2.3}$$

С точки зрения обычного векторного исчисления в эвклидовом пространстве можно считать набор чисел $\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$ компонентами некоторого вектора, касательного к кривой $x^i(\lambda)$; это легко понять из того, что $\{\mathrm{d}x^i\}$ — бесконечно малое перемещение вдоль кривой и деление его на $\mathrm{d}\lambda$ меняет лишь длину, а не направление этого перемещения. На самом деле, поскольку кривая берётся вместе с вполне определённым параметром, для каждой кривой однозначно определён набор $\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$, о котором мы говорим, что это — компоненты *касательного вектора* к кривой. Итак, в силу нашего определения кривой, каждая кривая имеет единственный касательный вектор.

Разумеется, каждый вектор является касательным к бесконечному числу кривых, проходящих через точку P, и для этого имеются две различные причины. Во-первых, существует много кривых, касающихся друг друга и имеющих одинаковый касательный вектор в точке P; во-вторых, данный путь (траекторию) можно перепараметризовать так, чтобы каса-

тельный вектор в P не изменился. Это изображено на рис. 2.10. В качестве простого примера рассмотрим кривую $x^i(\lambda)=\lambda a^i$, где числа $\{a^i\}$ — константы. Тогда если P — точка $\lambda=0$, то касательный вектор имеет вид $dx^i/d\lambda=a^i$. Другая кривая $x^i(\mu)=\mu^2 b^i+\mu a^i$ также проходит через P при $\mu=0$ и имеет такой же касательный вектор в этой точке, $dx^i/d\mu=a^i$. Перепараметризация первой кривой $x^i=$

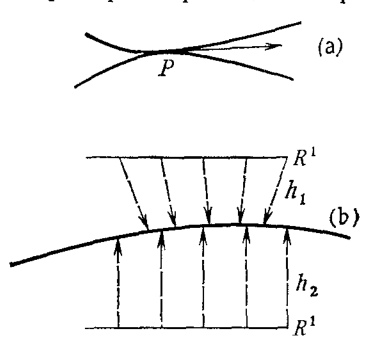


Рис 2.10 (а) Две кривые с общим касательным вектором (b) Две кривые, совпадающие геометрически (имеющие общую траекторию), но заданные при помощи различных параметризаций Если соответствующие отображения обозначить через h_1 и h_2, то отображение $h_2^{-1}\circ h_1$ задает связь параметров λ_1 и λ_2 $\lambda_2=\lambda_2(\lambda_1)$ Если $d\lambda_2/d\lambda_1=1$ в P, то в этой точке касательные векторы совпадают

$(\mu^3+\mu)a^i$ даёт кривую, проходящую через те же самые точки и имеющую в точке P $(\mu=0)$ тот же самый касательный вектор $dx^i/d\mu=a^i$. Итак, в действительности каждый вектор характеризует целый класс эквивалентности кривых, проходящих через данную точку.

Полезность термина «вектор» связана с привычностью этого понятия в геометрии эвклидова пространства, где векторы определяются аналогично перемещениям Δx^i. Однако поскольку на многообразии понятие расстояния между точками вовсе не обязано быть определённым, необходимо дать определение вектора, основанное только на рассмотрении инфинитезимальных окрестностей точек M. Пусть a и b — произвольные два числа и $x^i=x^i(\mu)$ — другая кривая, проходящая через точку P. Тогда в этой точке мы будем иметь

$$\frac{d}{d\mu}=\sum_i \frac{dx^i}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

и

$$a\frac{d}{d\lambda}+b\frac{d}{d\mu}=\sum_i\left(a\frac{dx^i}{d\lambda}+b\frac{dx^i}{d\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Итак, числа $\{a\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda + b\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\mu\}$ являются компонентами нового вектора, который, конечно же, касается *некоторой* кривой, проходящей через точку P. Следовательно, должна существовать кривая с параметром, скажем, φ, такая что в точке P

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} = \sum_i \left(a\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} + b\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Сопоставляя полученные результаты, заключаем, что в точке P

$$a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Следовательно, операторы дифференцирования вдоль кривых (типа $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$) образуют *векторное пространство* в точке P[1]. В каждой системе координат имеются специальные кривые, а именно сами координатные линии. Ясно, что операторы дифференцирования вдоль этих кривых суть просто $\partial/\partial x^i$ и соотношение (2.3) показывает, что каждый оператор $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ может быть представлен в виде линейной комбинации частных производных $\partial/\partial x^i$. Поэтому система $\{\partial/\partial x^i\}$ образует *базис* указанного векторного пространства. Из равенства (2.3) вытекает, что вектор $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ имеет в этом базисе компоненты $\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$. Мы получаем, следовательно, замечательный результат: *пространство всех касательных векторов в точке P и пространство всех дифференцирований вдоль кривых, проходящих через P, находятся во взаимно-однозначном соответствии.* По этой причине математики говорят, что $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и *есть* касательный вектор к кривой $x^i(\lambda)$. Мы будем следовать такому соглашению, так как оно обладает тремя достоинствами. Во-первых, оно является корректным, поскольку не привлекаются перемещения на конечные расстояния. Во-вторых, в нём нет упоминания о координатах; в частности, не используются понятия типа «преобразуется так же, как ...». В-третьих, производная — это своего рода «движение» вдоль кривой, порождаемое касательным вектором: такое соединение понятия анализа — производной с понятием геометрии — вектором имеет далеко идущие последствия.

Можно по-прежнему представлять себе наглядно вектор как стрелку, касающуюся кривой, поскольку компоненты его в точности те же самые. Теперь, однако, нужно иметь в виду, что складывать можно лишь векторы, торчащие из одной

[1] Надо, конечно, убедиться в том, что для этих производных выполняются и другие аксиомы векторного пространства (см. § 1.5); но лишь проверка замкнутости относительно взятия линейных комбинаций является не совсем тривиальной.

точки. Векторы, торчащие из разных точек, не имеют никакого отношения друг к другу. Касательные векторы лежат не в M, а в *касательном пространстве* к M в точке P, которое обозначается через T_P. Для привычных многообразий, таких как поверхность сферы, определённое выше касательное пространство совпадает, как легко видеть, с касательной плоскостью к сфере в данной точке. Для более абстрактных многообразий такое наглядное представление получить труднее.

Мы будем использовать термин *вектор* для вектора, торчащего в данной точке P многообразия M. Термин *векторное поле* будет обозначать правило, задающее вектор в каждой точке M.

2.8. БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ И БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Для любой точки P пространство T_P является векторным пространством той же размерности n, что и само многообразие. Любая совокупность n линейно-независимых векторов в T_P образует *базис* в T_P. Выбирая тот или иной базис в каждом T_P для всех точек P из M, мы получаем базисные векторные поля. Если в окрестности U точки P задана система координат $\{x^i\}$, то в каждой точке из U определён *координатный базис* $\{\partial/\partial x^i\}$.

Но вовсе не обязательно работать с координатным базисом — векторы можно записывать и по отношению к произвольному базису $\{\bar{e}_i\}$. Здесь индекс i используется для нумерации базисных векторов. Он *не* обозначает компоненту чего-либо. В точке P произвольный вектор V может быть записан в виде

$$\bar{V} = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j V^{j'} \bar{e}_j.$$

Числа $\{V^i\}$ являются компонентами вектора $\bar{V}$ относительно базиса $\{\partial/\partial x^i\}$. Числа $\{V^{j'}\}$ — компоненты $\bar{V}$ относительно $\{\bar{e}_j\}$; они связаны с V^i согласно обычному закону преобразования векторов, о чём ещё пойдет речь ниже. Если $\bar{V}$ и базисы $\{\partial/\partial x^i\}$ и $\{\bar{e}_j\}$ рассматриваются как векторные поля, то компоненты $\{V^i\}$ и $\{V^{j'}\}$ поля $\bar{V}$ являются *функциями* на M. Векторное поле называется дифференцируемым, если эти функции дифференцируемы.

Мы неявно предположили выше, что векторы $\{\partial/\partial x^i\}$ для произвольной координатной системы линейно-независимы в каждой точке P из U. Какие у нас соображения в пользу этого? Покажем, что это есть в точности условие того, что координаты являются *хорошими* в точке P, т. е. дают 1-1-отображение некоторой окрестности U точки P на соот-

ветствующую область V в R^n. Рассмотрим какую-нибудь *хорошую* систему координат на U, скажем $\{y^i, i=1, \ldots, n\}$. Тогда отображение из $\{(x^1, \ldots, x^n)\}$ в U может быть записано в виде

$$y^j = y^j(x^1, \ldots, x^n), \quad j=1, \ldots, n.$$

По теореме об обратной функции (§ 1.2) это отображение взаимно-однозначно, если и только если матрица Якоби $\partial y^j/\partial x^i$ невырожденна. Это означает, что в каждой точке из U векторы с компонентами $(\partial y^1/\partial x^1, \partial y^2/\partial x^1, \ldots, \partial y^n/\partial x^1)$, $(\partial y^1 \partial x^2, \partial y^2/\partial x^2, \ldots, \partial y^n/\partial x^2$, $(\partial y^1/\partial x^n, \partial y^2/\partial x^n, \ldots, \partial y^n/\partial x^n)$ линейно-независимы. Но это как раз и есть компоненты векторов $\{\partial/\partial x^i, i=1, \ldots, n\}$ относительно координатного базиса для системы координат $\{y^i\}$, поскольку, согласно цепному правилу,

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^n}$$

и аналогично для остальных x^i. Итак, действительно, система $\{x^i\}$ координат в окрестности U является хорошей, если и только если $\{\partial/\partial x^i\}$ образуют базис пространства касательных векторов для каждой точки из U. Советуем читателю рассмотреть базисные векторы, отвечающие сферическим координатам на сфере, и разобраться в том, как портится этот базис в полюсах.

2.9. РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Очень интересное многообразие получится, если объединить многообразие M с совокупностью всех его касательных пространств T_P. Это проиллюстрировано на рис. 2.11 для простейшего случая: одномерное многообразие M (кривая) и его касательные пространства (касательные к кривой в каждой её точке). В части (a) рисунка изображены кривая и несколько касательных пространств: это прямые, касающиеся кривой, причём каждая мыслится неограниченно продолженной в обе стороны, с тем чтобы векторы могли иметь произвольную длину в каждой точке. Но если бы всё это было нарисовано, то рисунок оказался бы неразборчивым, поскольку различные касательные беспорядочно пересекали бы друг друга и кривую M; эти случайные пересечения не имеют никакого значения. Лучше изобразить всё так, как показано в части (b), где касательные пространства расположены параллельно: они не пересекают друг друга и пересекают M только в той точке, к которой они относятся. К сожалению, этот рисунок не отражает того, что каждое T_P «касается» кривой: это та цена, которую приходится платить за

ясность рисунка. Каждая точка вертикальной прямой T_P представляет вектор, имеющий данную длину и касающийся M в точке P. Глядя на рис. 2.11 (b), можно сделать ещё одно наблюдение: каждая точка изображённой фигуры (двумерного многообразия) является точкой одного и только одного касательного к M пространства, скажем T_R для точки R из M. Каждой точке фигуры отвечает один и только один вектор в одной и только одной точке из M. Это наводит на мысль определить новое многообразие TM, состоящее из всех касательных векторов во всех точках: в рассматриваемом случае это

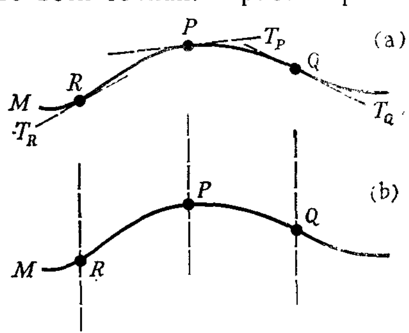


Рис. 2.11. (a) Одномерное многообразие и некоторые из его касательных пространств. (b) То же самое, но касательные пространства нарисованы параллельными друг другу, с тем чтобы исключить несущественные, случайные пересечения.

многообразие двумерно. Оно называется *расслоенным пространством* (или просто *расслоением*); его *слоями* являются пространства T_P для всех P. Использование термина «слой» объясняется картинками типа рис. 2.11 (b). Для того чтобы убедиться в двумерности TM, построим систему координат для небольшого куска этого пространства. Пусть одномерное многообразие M имеет координату x; выберем координаты в касательных пространствах, отвечающих точкам из M, лежащим в интервале $a < x < b$, для некоторых a и b, предполагая, что сама координата x является в этом интервале «хорошей». (Смысл такого предположения станет ясен из § 2.11 ниже.) Любой касательный вектор $\bar{V}$ в любой точке P может быть записан в виде

$$\bar{V} = y\partial/\partial x, \qquad (2.4)$$

так что компонента y является координатой для T_P (см. (2.1)). Ясно, что она будет хорошей координатой на всём слое T_P. Поскольку каждый слой отвечает фиксированному значению x, координаты (x, y) однозначно определяют касательный вектор (y) и точку, к которой он относится (x). Поскольку каждая точка расслоенного пространства должна,

по определению, лежать в некоторой области рассмотренного вида, то мы доказали, что TM является многообразием. Ясно, что эта конструкция легко переносится на касательные расслоения для многомерных многообразий. Координаты типа описанных выше, где координаты для T_P определяются координатами на M в окрестности P при помощи разложения вектора по базису (2.4), называются *естественными* координатами для TM.

Далее, кривая в рассматриваемом расслоенном пространстве, изображённая штриховой линией на рис. 2.12, задаёт

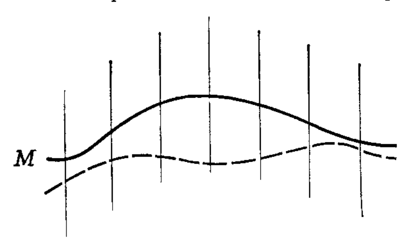


Рис. 2.12. Сечение (штриховая линия) расслоенного пространства TM над одномерным многообразием M (жирная линия).

некоторый вектор в каждой точке из M, поэтому такая кривая определяет векторное поле на M. Такая кривая называется *сечением* TM. Ясно, что, вообще говоря, не имеет никакого смысла говорить о длине такой кривой, так что мы имеем здесь пример многообразия, для которого не приходится утруждать себя определением в нём метрики.

В общем случае расслоенное пространство состоит из многообразия, называемого *базой* (в разобранном случае это была кривая M), и *слоя*, заданного для каждой точки базы. Если база n-мерна, а каждый слой m-мерен, то размерность расслоенного пространства равна $m+n$. Это многообразия особого рода, обладающие свойством разложимости на слои: точки одного слоя связаны друг с другом, а точки разных слоёв нет. Эта ситуация формализуется введением понятия *проекции* π, отображающей каждую точку слоя в ту точку базы, к которой «подвязан» данный слой. На произвольном многообразии такой проекции определить нельзя. В следующем параграфе мы приведём много примеров многообразий, являющихся расслоенными пространствами.

2.10. ПРИМЕРЫ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(i) Рассмотренное выше расслоенное пространство TM, состоящее из многообразия и его касательных пространств, называется *касательным расслоением* (или *касательным пучком*). *Это* — один из важнейших для физики примеров аб-

страктных многообразий. Для n-мерного многообразия M расслоение TM имеет размерность $2n$.

(ii) Дальше в этой главе мы перейдём от случая векторных полей к более общему случаю тензорных полей. Каждому типу тензоров отвечают соответствующие расслоения над гладкими многообразиями.

(iii) Слои не обязаны быть связанными с гладкой структурой на базе. Рассмотрим «внутренние» степени свободы, описывающие состояние элементарной частицы, такие как изоспин. Расслоение, слои которого являются изоспиновыми пространствами, а база — пространством-временем, может описывать как положение (x, y, z, t) частицы в пространстве-времени, так и её внутреннее состояние (изоспин).

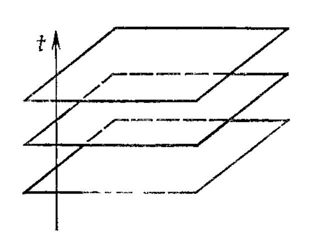


Рис. 2.13. Естественная структура расслоения ньютонова (галилеева) пространства-времени, слои которого определяются фиксацией единого мирового времени.

(iv) С точки зрения ньютоновой физики пространство-время естественно наделено структурой расслоенного пространства. Для Ньютона и Галилея время было абсолютным: каждый может определить, являются два данных события одновременными или нет, независимо от того, где они происходят. Мы можем, следовательно, построить расслоение, базой которого является R^1 (время), а слоем — R^3 (пространство). Это изображено на рис. 2.13. Между точками различных слоёв (точками пространства в разные моменты времени) нет никакой естественной связи, поскольку в ньютоновой физике нет абсолютного пространства: два различных наблюдателя, движущихся друг относительно друга, имеют различные точки зрения на то, какие точки пространства являются *неподвижными*. Поэтому естественной структуры расслоения с базой R^3 нет, а есть только расслоение с базой R^1. Один из эффектов эйнштейновской теории относительности — разрушение этой структуры расслоения и замена её другой структурой — метрической (см. § 2.31 ниже).

2.11. БОЛЕЕ ГЛУБОКИЙ ВЗГЛЯД НА РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В теории расслоенных пространств имеются два связанных друг с другом аспекта, которые нам предстоит рассмотреть, с тем чтобы по-настоящему оценить богатство и полезность понятия расслоения. Это их глобальные свойства и применение групп для их построения.

Чтобы лучше разобраться с глобальными свойствами расслоенных пространств, определим сперва более простое понятие *прямого произведения*. Любым двум пространствам M и N можно сопоставить их прямое (декартово) произведение $M \times N$, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b) с a из M и b из N. Например, R^2 есть прямое произведение $R^1 \times R^1$. Если M и N — многообразия, то $M \times N$ также, очевидно, будет многообразием: координаты $\{x^i,\ i = 1, \ldots, m\}$ для открытой области U в M вместе с координатами $\{y^i,\ i = 1, \ldots, n\}$ для открытой области V в N дают набор $m + n$ координат для открытой области $U \times V$ в $M \times N$. Из приведённой выше конструкции расслоенных пространств ясно, что по крайней мере локально они являются прямыми произведениями вида $U \times F$, где U — открытое множество базы B, а F представляет собой типичный слой (все слои тождественны F). На самом деле это свойство — часть определения расслоенного пространства; оно называется *локальной тривиальностью* расслоения (расслоение сводится к прямому произведению, если ограничиться рассмотрением достаточно малой области базы B). Интересен вопрос, является ли данное расслоение *глобально тривиальным*, т. е. может ли всё пространство расслоения в целом быть представлено в виде прямого произведения $B \times F$.

Обычно ответ оказывается отрицательным; мы приведём два примера, иллюстрирующих и смысл вопроса, и смысл ответа.

(i) Рассмотрим TS^2, касательное расслоение для двумерной сферы S^2. Если бы оно было глобально тривиальным, то существовало бы C^∞-отображение (диффеоморфизм) TS^2 на $S^2 \times R^2$, ибо типичным слоем является R^2, касательная плоскость. Рассмотрим множество точек в $S^2 \times R^2$ вида $(P, \bar{V})$, где P — произвольная точка из S^2, а $\bar{V}$ — некоторый *фиксированный* вектор из R^2. Тогда прообраз этого множества дал бы ненулевое *сечение* TS^2, т. е. C^∞-векторное поле на S^2, нигде не обращающееся в нуль. Но такого поля на S^2 *нет* Это — следствие знаменитой (и трудной) *теоремы о неподвижной точке на сфере*, согласно которой любое 1-1-отображение (диффеоморфизм) S^2 на себя имеет на S^2 по крайней мере одну неподвижную точку. Нигде не обращающееся в нуль векторное поле давало бы отображение без неподвижных точек, как будет объяснено ниже в § 3.1. Поэтому TS^2 в целом не является прямым произведением. Это пример, в котором расслоение нетривиально в силу свойств топологии базы (S^2).

(ii) Наш второй пример показывает, что нетривиальное расслоение можно построить даже на базе, допускающей тривиальное расслоение. Рассмотрим TS^1, касательное расслое-

ние для окружности S^1. В отличие от S^2 окружность допускает непрерывное нигде не обращающееся в нуль векторное поле, и TS^1 является прямым произведением $S^1 \times R$, как видно из рис. 2.14. Это просто глобальный вариант локальной картинки, изображенной на рис. 2.11 (b). Представим теперь,

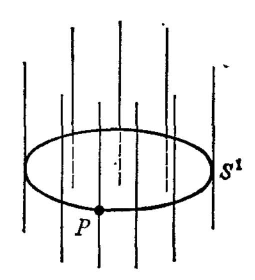


Рис. 2.14. Расслоение TS^1 тривиально — представимо в виде прямого произведения окружности S^1 на типичный слой R^1 (нарисованный вертикально). Ср. с рис. 2.11 (b).

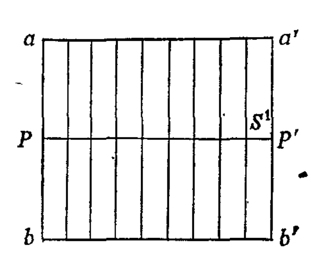


Рис. 2.15. Расслоение TS^1, разрезанное вдоль одного слоя и развёрнутое на плоскость. Слои простираются бесконечно далеко вверх и вниз.

что мы разрезали окружность в точке P на рис. 2.14 и «развернули» расслоение на плоскость, как показано на рис. 2.15. Чтобы по рис. 2.15 восстановить рис. 2.14, нужно просто отождествить точку a с точкой a', P с P', b с b' и т. д. Но мы можем «склеить» расслоение по-другому и получить лист Мёбиуса: отождествляем a с b', P с P', b с a' и т. д. Такая склейка закручивает нашу полоску, которая теперь будет выглядеть, примерно как на рис. 2.16. Локально она по-прежнему устроена, как на рис. 2.11 (b); действительно, расслоение над каждым связным открытым собственным подмножеством в S^1 («собственным» означает «не совпадающим с S^1») допускает непрерывное 1-1-отображение на некоторую часть рис. 2.14. Обойдя лист Мёбиуса вокруг, мы убеждаемся, что не существует *непрерывного* 1-1-отображения всего первого расслоения на второе. Поэтому лист Мёбиуса не является прямым произведением, и второе расслоение нетривиально. Конструкции нетривиальных расслоений используются в современной физике

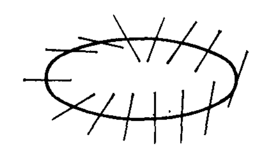


Рис. 2.16. Вариант расслоения с теми же базой и слоем, что и у TS^1, отвечающий листу Мёбиуса; слой переворачивается «вверх ногами» при обходе окружности. Локально здесь всё устроено так же, как и на рис. 2.11 (b).

элементарных частиц для определения так называемых «инстантонов».

Пример листа Мёбиуса весьма поучителен: из него видно, что недостаточно просто указать базу и слой, для того чтобы задать расслоение, поскольку расслоение может определяться своими базой и слоем неоднозначно. Требуется более точное определение расслоения, и здесь на помощь приходят группы. Различие между двумя указанными выше расслоениями над S^1 — в так называемой *структурной группе* расслоения. Чтобы сформулировать полное определение расслоенного пространства в компактном виде, нам потребуется понятие *гомеоморфизма*; это просто 1-1-отображение одного пространства на другое, непрерывное и имеющее непрерывное обратное[1]. (По поводу терминологии теории отображений см. § 1.2.) Мы определяем *расслоенное пространство* как пространство E, для которого заданы следующие объекты: многообразие B, называемое *базой*, *проекция* π: $E \to B$, типичный *слой* F, *структурная группа* G гомеоморфизмов F на себя и семейство $\{U_j\}$ открытых множеств, покрывающее B (т. е. семейство открытых множеств, объединение которых есть B), причём должны выполняться следующие требования.

(i) Локально расслоение является тривиальным; это означает, что расслоение над каждым множеством U_j (т. е. $\pi^{-1}(U_j)$) допускает гомеоморфизм на прямое произведение $U_j \times F$. Мы уже говорили об этом выше. Частью этого гомеоморфизма является гомеоморфизм каждого слоя $\pi^{-1}(x)$, где x — элемент базы B, на F. Обозначим его через $h_j(x)$, указывая тем самым не только точку x, над которой «висит» слой, но также и индекс j, нумерующий окрестность U_j, содержащую x.

(ii) Если точка x содержится в области перекрытия окрестностей U_j и U_k, то возникают два гомеоморфизма $h_j(x)$ и $h_k(x)$ слоя над точкой x на F. Поскольку гомеоморфизмы обратимы, отображение $h_j(x) \circ h_k^{-1}(x)$ является гомеоморфизмом F на F. Требуется, чтобы он принадлежал структурной группе G.

Последнее требование содержит информацию о глобальной структуре расслоенного пространства. Чтобы увидеть, как это работает, дадим полное определение расслоения TS^1 (допускающее непосредственное обобщение на случай расслоения TM для любого M). Расслоение $F = TS^1$ имеет базу $B = S^1$, типичный слой $F = R^1$ и проекцию π: $(x, \bar{v}) \mapsto x$, где x — точка из S^1 и $\bar{v}$ — вектор из T_x. В качестве открытого

[1] Гомеоморфизм — это диффеоморфизм без требований дифференцируемости. Для большинства физически интересных расслоений можно все гомеоморфизмы считать диффеоморфизмами.

покрытия $\{U_j\}$ можно взять любой атлас на S^1. Типичное семейство $\{U_j\}$ изображено на рис. 2.17. Каждое U_j имеет «систему» координат, т. е. параметризацию S^1, которую мы обозначим через λ_j. Вектор $d/d\lambda_j$ в точке x из U_j является базисом для T_x, так что каждый вектор $\bar{v}$ из T_x представляется в виде $\alpha_{(j)}\, d/d\lambda_j$ для некоторого фиксированного j, где $\alpha_{(j)}$ — вещественное число. Это не что иное, как соотношение (2.4). Гомеоморфизмы слоя T_x на R, входящие в определение TS^1, пусть *по определению* имеют вид $h_j(x)\colon \bar{v} \longmapsto \alpha_{(j)}$. Если x содержится в двух окрестностях U_j и U_k, то имеются два таких гомеоморфизма T_x на R, и, поскольку λ_j и λ_k никак не связаны между собой, $\alpha_{(j)}$ и $\alpha_{(k)}$ могут быть двумя любыми ненулевыми вещественными числами. Гомеоморфизм $h_j(x) \circ h_k^{-1}(x)\colon F \to F$ действует так: $\alpha_{(k)} \longmapsto \alpha_{(j)}$ и, значит, является умножением на число $r_{jk} = \alpha_{(j)}/\alpha_k$. Поскольку r_{jk} может быть любым ненулевым вещественным числом, структурной группой здесь служит $R^1 \setminus \{0\}$ — группа относительно умножения (фактически группа Ли). Отметим, что для общего n-мерного многообразия M структурная группа расслоения TM есть совокупность всех $n \times n$-матриц с ненулевым определителем; эта группа обозначается через $GL(n, R)$. Мы изучим её свойства в гл. 3.

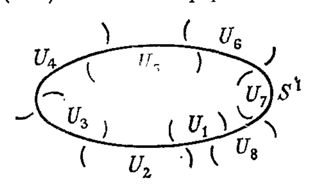


Рис. 2.17. Совокупность открытых множеств в S^1, покрывающая S^1. Границы этих множеств указаны скобками. Множество U_1 имеет перекрытие с U_2, U_2 с U_3 и так далее вплоть до U_8, имеющего перекрытие с U_1.

Итак, TS^1 определено. Но как оно выглядит? Можно выбрать координаты λ_j таким образом, что любые две из них, скажем λ_j и λ_k, возрастали на общей части окрестностей U_j и U_k в одном направлении. (Мы выражаем этот факт, говоря, что S^1 *ориентируемо*, см. § 4.7.) При таком выборе координатных окрестностей все «числа перекрытия» r_{jk} будут, как легко видеть, положительными, и структурная группа сведётся к R^+, группе положительных вещественных чисел по умножению. Более того, можно добиться, чтобы $d\lambda_j/d\lambda_k = 1$ в каждой области перекрытия. Тогда группа сведётся просто к 1 — к одному единичному элементу. Последняя структурная группа тривиальна, тривиальна и структура расслоения. Это и есть расслоение, изображённое на рис. 2.14.

Для того чтобы описать структуру листа Мёбиуса, нужно использовать другие отображения $h_j(x)$, причём следует быть внимательным, чтобы не «перепутать» это расслоение с касательным. Простейшая возможность — воспользоваться семейством $\{U_j,\ j = 1, \ldots, 8\}$, изображённым на рис. 2.17, и положить $r_{12} = 1$, $r_{23} = 1$, ..., $r_{78} = 1$. Но теперь закрученность

листа Мёбиуса вынуждает нас положить $r_{81} = -1$. Структурная группа состоит из двух элементов $\{1, -1\}$ с умножением в качестве групповой операции. Можно выбрать числа r_{jk} и по-другому, но уменьшить структурную группу невозможно.

Касательное расслоение TS^1 имеет своей структурной группой $R^1 \setminus \{0\}$ — почти что типичный слой. *Расслоение реперов* на произвольном многообразии M — это расслоение, у которого та же структурная группа, что и у TM, а слоем является множество всех *базисов* в касательном пространстве (т. е. в R^n). Для одномерного многообразия типа S^1 это есть множество всех ненулевых векторов, совпадающее с $R^1 \setminus \{0\}$. Так что слои расслоения реперов на S^1 гомеоморфны его структурной группе; это верно для всех расслоений реперов. Такие расслоения называются *главными расслоенными пространствами.*

2.12. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Как было определено в § 2.7, *векторное поле* — это правило, задающее вектор в каждой точке многообразия M. В каждой точке — своё касательное пространство, так что векторное поле «выбирает» по одному вектору из каждого такого пространства. Далее, для каждой кривой в каждой её точке определён касательный вектор, и возникает естественный вопрос, нельзя ли, обратно, для заданного векторного поля найти кривую, начинающуюся в заданной точке P, касательный вектор к которой в каждой её точке принадлежит векторному полю? Для векторных полей класса C^1 ответ положителен; такие кривые называются *интегральными кривыми* векторного поля. Доказательство состоит в следующем. Пусть $V^i(P)$ — компоненты рассматриваемого векторного поля (это функции от P). В некоторой координатной системе $\{x^i\}$ мы имеем $V^i(P) = v^i(x^j)$. То что это поле касается кривой с параметром λ, означает, что

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i(x^j). \tag{2.5}$$

Мы получаем для $x^i(\lambda)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, у которой всегда существует единственное решение в некоторой окрестности начальной точки P. (Теорема существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений доказана в большинстве руководств по дифференциальным уравнениям, например в книге Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette & Dillard — Bleick (1977) (см. библиографию в конце главы). Два примера векторных полей представлены на рис. 2.18.

Отметим, что различные интегральные кривые могут пересекаться лишь в таких точках, где $V^i = 0$ для всех i, в силу единственности решения для системы (2.5). Поскольку через каждую точку P проходит некоторая интегральная кривая (она получается решением системы (2.5) с начальным условием в точке P), интегральные кривые «заполняют» всё M. Например, если M трёхмерно, то на нём любое векторное поле

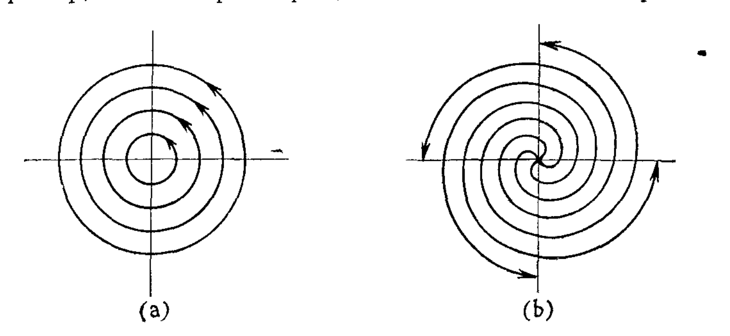


Рис. 2.18. Интегральные кривые для двух векторных полей на R^2: (a) $V = x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$; (b) $V = (x + y/r)\partial/\partial y - (y - x/r)\partial/\partial x$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

задаёт двумерное семейство интегральных кривых, покрывающих всё M (за исключением, быть может, точек, где $V^i = 0$ для всех i). Такое заполняющее многообразие множество кривых называется *конгруэнцией*. Отметим, между прочим, что это множество кривых обычно само можно рассматривать как многообразие.

2.13. ЭКСПОНЕНТА ОТ ОПЕРАТОРА d/dλ

Введём понятие, которое окажется полезным для последующих вычислений. Пусть задано *аналитическое* многообразие (класса C^ω), и пусть координаты $x^i(\lambda)$ точек каждой из интегральных кривых поля $\bar{Y} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ являются аналитическими функциями от λ. Тогда координаты точек, отвечающих значениям параметра λ_0 и $\lambda_0 + \varepsilon$, связаны между собой при помощи ряда Тэйлора:

$$x^i(\lambda_0 + \varepsilon) = x^i(\lambda_0) + \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\lambda_0} + \frac{1}{2!}\varepsilon^2\left(\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) + \ldots$$

$$= \left(1 + \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} + \ldots\right)x^i\Big|_{\lambda_0} = \exp\left[\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right]x^i\Big|_{\lambda_0}, \quad (2.6)$$

где обозначение с «exp» является очевидным и удобным сокращением для «дифференциального оператора», который, будучи применен к $x^i(\lambda)$, даёт, после подстановки $\lambda = \lambda_0$, ряд

Тэйлора. Этот оператор называется *экспонентой от оператора* $\varepsilon d/d\lambda$. Оператор $\varepsilon d/d\lambda$ представляет бесконечно малое движение вдоль интегральной кривой, а его экспонента даёт конечное движение. Мы будем использовать на равных обозначения

$$\exp(\varepsilon d/d\lambda) = e^{\varepsilon d/d\lambda} = e^{\varepsilon \bar{V}}.$$

2.14. СКОБКИ ЛИ И НЕКООРДИНАТНЫЕ БАЗИСЫ

Если задана какая-нибудь координатная система x^i, то часто бывает удобно выбирать $\{\partial/\partial x^i\}$ в качестве базисных векторных полей. Однако в качестве базиса можно брать *любое* линейно-независимое семейство векторных полей: нетрудно понять, что не все они происходят из каких-либо систем координат. Дело в том, что операторы $\partial/\partial x^i$ и $\partial/\partial x^j$ *коммутируют* при всех i, j, а два произвольных векторных поля, вообще говоря, не коммутируют: если $\bar{V} = d/d\lambda$ и $\bar{W} = d/d\mu$, то

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu} - \frac{d}{d\mu}\frac{d}{d\lambda} = \sum_{i,j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} W^j \frac{\partial}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial}{\partial x^j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$= \sum_{i,j} V^i W^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$
$$+ \sum_{i,j} V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{i,j} W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$= \sum_{i,j}\left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{2.7}$$

(последняя строчка получается из предпоследней переобозначением индексов суммирования во второй сумме предпоследней строчки). Таким образом,

◆ $$\left[\frac{d}{d\lambda}, \frac{d}{d\mu}\right] \equiv \frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu} - \frac{d}{d\mu}\frac{d}{d\lambda} \tag{2.8}$$

является *векторным полем*, вообще говоря ненулевым. Если $d/d\lambda$ и $d/d\mu$ служат элементами некоторого базиса, то их нельзя представить в виде дифференцирований по каким-либо координатам. Такой базис является некоординатным.

Важно уяснить себе, что это различие между координатным и некоординатным базисами проявляется, лишь если рассматривать некоторую область многообразия, а не одну отдельную точку. Оно определяется *производными* от компонент векторов, а не только значениями в данной точке. Таким образом, различие в свойствах координатных и некоординат-

ных базисов имеет значение, только когда мы имеем дело с областями многообразия, и несущественно в задачах, где рассматривается лишь касательное пространство T_P в одной точке P.

Упражнение 2.1. Показать, что «единичные» базисные векторные поля для полярных координат на эвклидовой плоскости, определяемые формулами

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{y}},$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{y}},$$

где $\hat{\mathbf{x}} = \partial/\partial x$ и $\hat{\mathbf{y}} = \partial/\partial y$, образуют некоординатный базис.

Коммутатор $[\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu]$ называется *скобкой Ли*[1] полей $\bar{V}$ и $\bar{W}$. Дадим её геометрическую интерпретацию. На рис. 2.19 изображена типичная координатная сетка на двумерном многообразии. Заметим, что по определению x^1 постоянно вдоль линий x^2, являющихся интегральными кривыми поля $\partial/\partial x^2$. Именно поэтому поля $\partial/\partial x^1$ и $\partial/\partial x^2$ и коммутируют: каждое из них является дифференцированием вдоль линий, на которых другая координата фиксирована. Рассмотрим теперь два произвольных векторных поля $\bar{V} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и $\bar{W} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$, интегральные кривые которых изображены на рис. 2.20. Интегральная кривая поля $\bar{W}$ не обязательно будет кривой, на которой λ постоянно, и наоборот. Дифференцирование $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ не является дифференцированием при постоянном λ, поэтому $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ не коммутируют. Хотя кривые полей $\bar{V}$ и $\bar{W}$ выглядят как координатные, их *параметризация* не такая, как в координатной системе. И даже то, что они *выглядят* как координатные, есть лишь специфика размерности два: в трёхмерной ситуации может случиться, что кривая (1) пересекает кривые (α) и (β), а кривая (2) пересекает только (α).

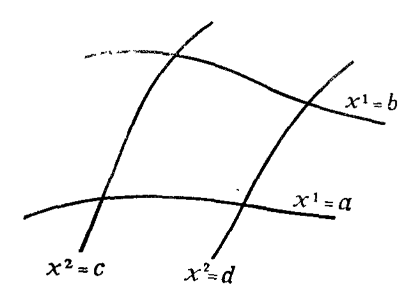


Рис. 2.19. Типичная координатная сетка на двумерном многообразии.

---

[1] И скобки Ли, и группы Ли обязаны своим названием одному и тому же человеку — Софусу Ли, великому математику конца 19-го века. Скобки Ли, как будет видно дальше, являются частным случаем производных Ли. Читатель, знакомый с теорией групп Ли, узнает в определении скобки Ли определение коммутатора векторных полей $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$, являющихся генераторами некоторой группы Ли преобразований. Мы обсудим эту связь в гл. 3.

Для вектора $[\bar{V}, \bar{W}]$ можно дать геометрическую картинку (рис. 2.21). Отправляясь от точки P, сдвинемся на $\Delta\lambda = \varepsilon$ вдоль интегральной кривой поля V, проходящей через P; затем сдвинемся на $\Delta\mu = \varepsilon$ вдоль интегральной кривой поля W.

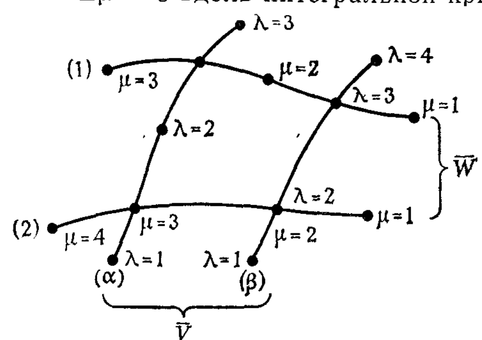


Рис. 2.20. Типичные интегральные кривые для двух векторных полей на двумерном многообразии.

Пусть мы попадём в точку A. Начиная снова из точки P и сдвигаясь сначала на $\Delta\mu = \varepsilon$, а затем на $\Delta\lambda = \varepsilon$, мы придём

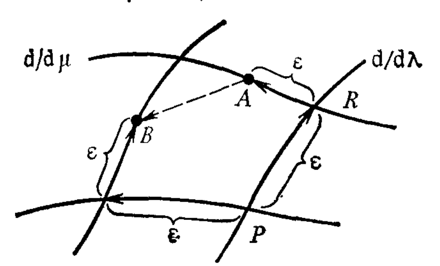


Рис. 2.21. Геометрическая интерпретация скобки Ли $[\bar{V}, \bar{W}]$ как "меры незамкнутости" параллелограмма, стороны которого отвечают равным приращениям параметров вдоль интегральных кривых полей $\bar{V}$ и $\bar{W}$.

в некоторую точку $B \neq A$. Покажем, что вектор, идущий из A в B, есть $\varepsilon^2[\bar{V}, \bar{W}]$ с точностью до членов более высокого порядка по ε.

Удобнее всего использовать введённый выше экспоненциальный оператор. Ясно, что

$$x^i(R) = \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\lambda}\right] x^i \Big|_P,$$

$$x^i(A) = \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\mu}\right] \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\lambda}\right] x^i \Big|_P . \tag{2.9}$$

Аналогично путь, идущий в точку B из точки P, даёт

$$x^i(B) = \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\lambda}\right] \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\mu}\right] x^i \Big|_P . \tag{2.10}$$

Поэтому разность координат точек A и B равна

$$x^i(B) - x^i(A) = [e^{\varepsilon d/d\lambda}, e^{\varepsilon d/d\mu}] x^i|_P; \tag{2.11}$$

справа стоит в точности коммутатор экспоненциальных операторов. Переходя к разложениям Тэйлора, получаем

$$[e^{\varepsilon d/d\lambda}, e^{\varepsilon d/d\mu}] = \Big[1 + \varepsilon \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{d^2}{d\lambda^2} + O(\varepsilon^3),\; 1 + \varepsilon \frac{d}{d\mu} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{d^2}{d\mu^2} + O(\varepsilon^3)\Big] = \varepsilon^2 \Big[\frac{d}{d\lambda}, \frac{d}{d\mu}\Big] + O(\varepsilon^3),$$

т. е.

$$x^i(B) - x^i(A) = \varepsilon^2 [\bar{V}, \bar{W}] x^i|_P + O(\varepsilon^3). \tag{2.12}$$

Это — i-я компонента скобки Ли: равенство (2.12) подтверждает справедливость нашей геометрической картинки для скобки Ли.

Упражнение 2.2. (a) Используя равенство (2.6), докажите формулу (2.12).

(b) Докажите, что

$$\exp[a d/d\lambda + b d/d\mu] = \exp[a d/d\lambda] \exp[b d/d\mu] \tag{2.13}$$

при всех a и b, если и только если $[d/d\lambda, d/d\mu] = 0$.

Упражнение 2.3. Докажите, что любые три дважды дифференцируемые (т. е. класса C^2) векторные поля $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ удовлетворяют *тождеству Якоби*

$$[[\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}] + [[\bar{Y}, \bar{Z}], \bar{X}] + [[\bar{Z}, \bar{X}], \bar{Y}] = 0. \tag{2.14}$$

Алгеброй Ли векторных полей в области U многообразия M называется всякая совокупность A векторных полей на U, являющаяся векторным пространством относительно сложения (это значит, что любая линейная комбинация *с постоянными коэффициентами* полей из A снова есть поле из A) и замкнутая относительно операции коммутирования (скобка Ли двух полей из A снова есть поле из A). Ясно, что совокупность всех векторных полей класса C^∞ на U является алгеброй Ли: гораздо интереснее, однако, когда выделенная по той или иной причине меньшая совокупность векторных полей тоже образует алгебру Ли. Такие совокупности тесно связаны со свойствами симметрии многообразия и с соответствующими группами симметрии, которые обычно являются группами Ли. Мы изучим их более подробно в гл. 3, где будет также дано более общее определение алгебры Ли.

2.15. КОГДА БАЗИС ЯВЛЯЕТСЯ КООРДИНАТНЫМ?

Пусть даны два векторных поля $\bar{A} = d/d\lambda$ и $\bar{B} = d/d\mu$ на двумерном многообразии M; предположим, что $\bar{A}$ и $\bar{B}$ линейно-независимы в каждой точке некоторого открытого множества U из M, так что они образуют там базис векторных полей. В каком случае можно быть уверенным, что этот базис является координатным, другими словами, что λ и μ являются координатами на U? Очевидно, необходимо, чтобы наши поля коммутировали:

$$[\bar{A}, \bar{B}] = 0.$$

Покажем, что это условие является также и достаточным. Для этого обратимся непосредственно к определению многообразия — построим соответствующее 1-1-отображение из U

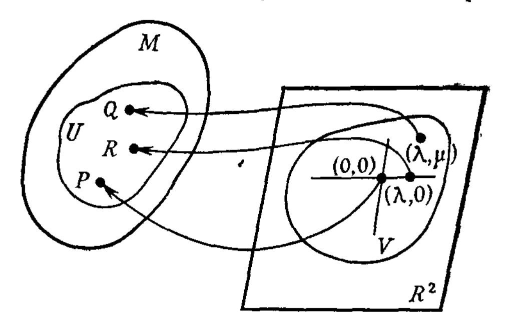


Рис. 2.22. Описанное в тексте отображение из R^2 в M. Оно задаёт систему координат в некоторой окрестности точки P.

на некоторое открытое множество в R^2. Отправляясь от некоторой точки P из U и используя произвольные координаты (x^1, x^2) в U, сместимся вдоль поля $\bar{A}$ на «параметрическое расстояние» λ_1; мы попадём в точку R с координатами (см. (2.6))

$$x^i(R) = e^{\lambda_1\, d/d\lambda} x^i \big|_P.$$

Если мы сначала сместимся на расстояние λ_1 вдоль $\bar{A}$, а затем на μ_1 вдоль $\bar{B}$, то попадём в точку Q с координатами

$$x^i(Q) = e^{\mu_1 d/d\mu} e^{\lambda_1\, d/d\lambda} x^i \big|_P.$$

Эта формула определяет отображение экспоненциального типа из некоторой окрестности V начала координат в R^2 в U; данный элемент из V — пара (λ_1, μ_1) — отображается в точку Q. Это отображение изображено на рис. 2.22. Для того чтобы оно определяло координатную систему, оно должно быть взаимно-однозначным, т. е. должно иметь обратное. Ниже мы докажем, что обратное отображение на самом деле суще-

ствует всюду в U, но сначала покажем, что A и B являются координатными базисными векторами этой координатной системы, если они коммутируют в U. Перепишем наше отображение в виде координатного преобразования от $\{\alpha, \beta\}$ к $\{x^1, x^2\}$:

$$x^i(\alpha, \beta) = e^{\beta d/d\mu} e^{\alpha d/d\lambda} x^i|_P.$$

Базисные векторы $\partial/\partial\alpha$ и $\partial/\partial\beta$ имеют (в системе координат $\{x^i\}$) компоненты $\partial x^i/\partial\alpha$ и $\partial x^i/\partial\beta$ соответственно. Из (2.6) легко вытекает, что

$$\frac{d}{d\alpha} e^{\alpha d/d\lambda} = e^{\alpha d/d\lambda} \frac{d}{d\lambda},$$

и, поскольку $d/d\mu$ и $d/d\lambda$ коммутируют, мы получаем

$$\frac{\partial x^i}{\partial \alpha} = e^{\beta d/d\mu} e^{\alpha d/d\lambda} \frac{dx^i}{d\lambda}\bigg|_P,$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial \beta} = e^{\beta d/d\mu} e^{\alpha d/d\lambda} \frac{dx^i}{d\mu}\bigg|_P.$$

Но $dx^i/d\lambda$ — это в точности компоненты поля $d/d\lambda$ в координатной системе $\{x^i\}$. Поскольку они являются аналитическими функциями на M, то после применения к ним оператора $\exp(\beta d/d\mu) \exp(\alpha d/d\lambda)$ мы получим их значение в точке, координаты которой равны (α, β). Следовательно, всюду на U

$$\partial/\partial\alpha = d/d\lambda \quad \text{и} \quad \partial/\partial\beta = d/d\mu;$$

тем самым мы доказали достаточность условия $[\bar{A}, \bar{B}] = 0$ для того, чтобы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ были координатными базисными векторами.

Обратимся теперь к обещанному доказательству того, что $\{\alpha, \beta\}$ образуют координатную систему в U. Нужно доказать, что отображение $\{\alpha, \beta\} \longmapsto \{x^i\}$ обратимо, и для этого мы используем теорему об обратной функции (см. § 1.2). Согласно этой теореме, если матрица

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \beta} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

в некоторой точке $\{\alpha, \beta)$ имеет ненулевой определитель, то в некоторой окрестности этой точки указанное отображение обратимо. Определитель обращается в нуль, если и только если векторы $\partial x^i/\partial\alpha$, $\partial x^i/\partial\beta$ линейно-зависимы: из сказанного выше ясно, что этого никогда не бывает, ибо $\bar{A}$ и $\bar{B}$ линейно-независимы в U. Таким образом, наше отображение обратимо во всём множестве U и, значит, задаёт систему координат.

Интересно выяснить, в каком месте не пройдут наши рассуждения, если $[A, B] \neq 0$. В этом случае выражение $\partial x^i/\partial\beta$ более сложно. По-прежнему наше отображение будет обратимым, по крайней мере в некоторой окрестности точки $\alpha = \beta = 0$. Но поскольку $\partial x^i/\partial\beta$ уже не равно больше $dx^i/d\mu$ в изучаемой точке, векторы A и B не будут базисными векторами построенной системы координат.

Проведённые выше рассуждения обобщаются на n-мерный случай: если n векторных полей $\{\bar{Y}_{(j)}, j = 1, \ldots, n\}$ на n-мерном многообразии M линейно-независимы и коммутируют друг с другом в некоторой открытой области U на M, то они являются координатными базисными векторами координатной системы $\{\alpha_j\}$, имеющей в произвольных координатах $\{x^i\}$ вид

$$x^i(\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n) = \exp\Big[\sum_j \alpha_j \bar{Y}_{(j)}\Big] x^i \Big|_P,$$

где в качестве «центра» P берётся произвольная точка из U.

2.16. ОДИН-ФОРМЫ

Вернёмся к изучению T_P — пространства всех касательных векторов в точке P. В качестве первого примера тензоров определим *один-формы* как линейные вещественнозначные функции на векторах. Это означает следующее: один-форма $\tilde{\omega}$ в точке P сопоставляет вектору $\bar{V}$ в точке P некоторое вещественное число, обозначаемое через $\tilde{\omega}(\bar{V})$. Обозначение с волной подчёркивает то обстоятельство, что $\tilde{\omega}$ является функцией на векторах. (Волна $\tilde{}$ над буквой всегда обозначает один-формы, точно так же как черта $\bar{}$ над буквой всегда обозначает векторы.) Линейность этой функции означает, что

$$\tilde{\omega}(a\bar{V} + b\bar{W}) = a\tilde{\omega}(\bar{V}) + b\tilde{\omega}(\bar{W}), \qquad (2.15)$$

где a и b — вещественные числа. Непосредственно определяются сложение один-форм и их умножение на вещественные числа: $a\tilde{\omega}$ есть один-форма вида

$$(a\tilde{\omega})(\bar{V}) = a[\tilde{\omega}(\bar{V})], \qquad (2.16a)$$

а сумма $\tilde{\omega} + \tilde{\sigma}$ есть один-форма вида

$$(\tilde{\omega} + \tilde{\sigma})(\bar{V}) = \tilde{\omega}(\bar{V}) + \tilde{\sigma}(\bar{V}) \qquad (2.16b)$$

(здесь $\bar{V}$ — произвольный вектор). Таким образом, совокупность один-форм в данной точке образует векторное пространство; оно называется двойственным (дуальным, сопряжённым) к T_P и обозначается через T_P^*. Термин «двойственное» употребляется потому, что векторы также можно рассматривать как линейные вещественнозначные функции на

один-формах. А именно, для любого вектора $\bar{V}$ мы *полагаем* его значение на один-форме $\tilde{\omega}$ равным $\tilde{\omega}(\bar{V})$. Это линейная функция, поскольку её значение на $a\tilde{\omega}+b\tilde{\sigma}$ равно, в силу (2.16),

$$(a\tilde{\omega}+b\tilde{\sigma})(\bar{V})=(a\tilde{\omega})(\bar{V})+(b\tilde{\sigma})(\bar{V})$$
$$=a\ (\text{значение}\ \bar{V}\ \text{на}\ \tilde{\omega})+b\ (\text{значение}\ \bar{V}\ \text{на}\ \tilde{\sigma}). \tag{2.17}$$

Таким образом, именно мы можем рассматривать каждую из этих величин как линейную вещественнозначную функцию, аргументом которой служит другая величина; поэтому и говорят, что векторы и один-формы *двойственны* друг другу. Значения одних на других записывают разными способами:

◆ $$\tilde{\omega}(\bar{V})\equiv\bar{V}(\tilde{\omega})\equiv\langle\tilde{\omega},\bar{V}\rangle; \tag{2.18}$$

в последнем обозначении подчеркивается равноправие обоих партнёров. Величина $\tilde{\omega}(\bar{V})$ называется часто *свёрткой* с $\bar{V}$. В более старых руководствах по тензорной алгебре векторы часто называются «контравариантными векторами», а один-формы — «ковариантными векторами». Эти названия указывают на то, как ведут себя компоненты соответствующих объектов при замене базиса, о чём будет идти речь в § 2.26.

2.17. ПРИМЕРЫ ОДИН-ФОРМ

Прежде чем излагать дальше математическую теорию, рассмотрим несколько простых примеров один-форм. Один из наиболее часто встречающихся примеров — это градиент функции: о нём речь пойдёт в § 2.19. Приведём другие примеры.

(i) В матричной алгебре, если считать «векторами» вектор-столбцы, то вектор-строки будут один-формами. Действительно, если их перемножить (в правильном порядке) по обычным правилам матричного умножения, то получится вещественное число. Например, в двумерном случае вектор-строку (—1, 5) можно считать функцией, сопоставляющей любому вектор-столбцу вещественное число:

$$(-1,\ 5):\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto(-1,\ 5)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-x+5y.$$

Легко проверяется линейность этой функции.

(ii) В используемых в квантовой механике гильбертовых пространствах аналогами вектор-строк и вектор-столбцов из примера (i) являются так называемые кет-векторы $|\psi\rangle$ (векторы) и бра-векторы $\langle\varphi|$ (один-формы) (названия и обозначения Дирака), свёртка $\langle\varphi|\psi\rangle$ которых есть комплексное

число. (Обобщение векторной и тензорной алгебры на комплексный случай тривиально: нужно лишь заменить слово «вещественный» на «комплексный». Обобщение построенной выше теории вещественных многообразий на комплексно-аналитический случай, где координатными отображениями служат комплексно-аналитические отображения в пространство комплексных переменных $(z^1, z^2, \ldots, z_n)$, также по большей части не представляет труда. Но некоторые свойства комплексных многообразий, такие как глобальная структура и кривизна, гораздо труднее поддаются изучению, и этих вопросов в настоящей книге мы касаться не будем.) Обозначение $\langle\varphi|\psi\rangle$ аналогично (2.18), и это не случайно.

В обоих примерах (i) и (ii) имеется возможность «переводить векторы в один-формы (и обратно), сопоставляя данному вектору «сопряжённый», или «транспонированный», объект, являющийся один-формой. В § 2.29 мы увидим, что это эквивалентно заданию метрики или скалярного произведения в рассматриваемом векторном пространстве. Это очень важная дополнительная структура в векторном пространстве, но читателю следует иметь в виду, что нет никакого априорного, «естественного» способа идентификации один-форм и векторов.

2.18. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА

В квантовой механике часто приходится иметь дело с *функциональными пространствами* (пространствами функций). Рассмотрим множество $C[-1, 1]$ всех вещественнозначных функций класса C^∞, определённых на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ в R^1. Это множество является группой относительно сложения (сумма двух C^∞-функций снова есть C^∞-функция и т. д.) и векторным пространством над вещественными числами (если f есть C^∞-функция, то cf также будет C^∞-функцией для любой вещественной константы c). Элементы двойственного пространства (один-формы) называются *распределениями* (или обобщёнными функциями). Примером распределения служит *дельта-функция Дирака* $\delta(x)$, определяемая как один-форма, значение которой на C^∞-функции $f(x)$ есть $f(0)$:

$$\langle\delta(x), f(x)\rangle = f(0). \tag{2.19}$$

В одном смысле $\delta(x)$ — действительно настоящая функция: она есть отображение $C[-1, 1] \to R$. Обычно термин «распределение» используется только для непрерывных (линейных) функций такого типа. Но понятие непрерывности требует введения топологии, на этот раз топологии в $C[-1, 1]$. Это — бесконечномерное векторное пространство (в нём имеется

бесконечное число линейно-независимых функций), а обсуждение топологии таких пространств далеко выходит за рамки настоящей книги. Интересующегося читателя мы отсылаем к Choquet-Bruhat et al. (1977). Здесь важно отметить, что мы понимаем дельта-функцию не в том смысле, который вкладывали в это понятие Дирак и его современники. Чтобы уяснить себе, что́ они имели в виду, разберём, как сделать из функции — элемента пространства $C[-1, 1]$ — один-форму на $C\,[-1, 1]$.

Для любой функции g из $C[-1, 1]$ можно определить один-форму $\tilde{g}$, значение которой на функции f из $C[-1, 1]$ равно

$$\langle\tilde{g}, f\rangle = \int_{-1}^{1} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.20}$$

Это, действительно, линейное отображение, переводящее f в значение соответствующего интеграла. (Поскольку g и f непрерывны на $-1 \leqslant x \leqslant 1$, этот интеграл всегда существует.) Термин «дельта-функция» был использован как камуфляж следующего обратного «рассуждения»: раз $\delta(x)$ — один-форма, то можно говорить о ней и как о функции от x в обычном смысле слова, такой что интеграл от её произведения на $f(x)$ равен $f(0)$:

$$\int_{-1}^{1} \delta(x) f(x)\,dx = f(0).$$

Эта идея была очень болезненно воспринята математиками, некоторые из них даже заявили, что Дирак ошибается, несмотря на то что он получал полезные и самосогласованные результаты. Физики, однако, мудро отвергли эту крайнюю точку зрения и больше прислушивались к своей интуиции. Теперь мы в состоянии понять, почему они «ошибались» и при этом получали верные результаты. Они «ошибались», поскольку говорили о $\delta(x)$ как о функции $R^1 \to R^1$, каковой существовать не может ни в каком точном смысле слова, и поскольку они манипулировали с ней, как с обычной функцией, интегрируя её и даже дифференцируя

$$\int_{-1}^{1} \delta'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} \delta(x) f'(x)\,dx = -f'(0).$$

Но они при этом были «правы», поскольку нигде не использовали $\delta(x)$ без интеграла с достаточно гладкой функцией $f(x)$ — они нигде не использовали её иначе, как для того, чтобы задать отображение функций в вещественные числа,

Таким образом, они пользовались техникой, но не языком теории обобщённых функций, которая была специально придумана для того, чтобы подвести под дельта-функции солидный фундамент. Отметим, однако, что теория обобщённых функций отличается от старой физической точки зрения своей большой простотой: можно определить дельта-функцию без привлечения правил типа (2.20) для превращения функций в один-формы. Как отмечалось в примере (ii) выше, такое правило есть дополнительная структура в векторном пространстве, которая, как мы теперь понимаем, не нужна для определения дельта-функции.

Стоит ещё заметить следующее. Выше мы сказали, что слово «распределение» используется только для *непрерывных* один-форм, в соответствии с общепринятым определением двойственного векторного пространства («топологического сопряжённого»). Однако в наше определение один-форм в § 2.16 требование непрерывности мы не включили; не проявили ли мы здесь непоследовательности? Нет, не проявили, потому что на конечномерном векторном пространстве любая линейная функция *всегда* непрерывна (см., например, Choquet-Bruhat et al. (1977) или Rudin (1964) из библиографии к гл. 1).

2.19. ГРАДИЕНТ И НАГЛЯДНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ОДИН-ФОРМ

Поле один-форм — это, по аналогии с векторным полем, правило, задающее в каждой точке один-форму. Содержащиеся в формулах (2.16) определения переносятся на поля: в этом случае a есть функция на M, не обязательно постоянная. Дифференцируемость полей один-форм можно определить через дифференцируемость векторных полей и функций. А именно, на C^∞-многообразии заданная один-форма $\tilde{\omega}$ вместе с векторным полем $\bar{V}$ определяют функцию $\tilde{\omega}(\bar{V})$. Если эта функция принадлежит к классу C^∞ для любого C^∞-поля $\bar{V}$, то $\tilde{\omega}$ называется один-формой класса C^∞. (Более простое определение дифференцируемости мы дадим после того, как введём в § 2.20 компоненты один-форм.) Как и в случае векторных полей, возникает расслоенное пространство, называемое *кокасательным расслоением* T^*M; базой этого расслоения является M, а слоем над точкой P служит T_P^*. Сечения T^*M суть поля один-форм.

Наиболее полезный и поучительный пример один-формы — это градиент функции f, который мы обозначим через $\tilde{d}f$. Хотя в элементарных учебниках векторного анализа его и называют вектором, на самом деле это всё же один-форма. Итак, *градиент* $\tilde{d}f$ (не путать с «инфинитезимальным диффе-

ренциалом» $\mathrm{d}f$, который мы изредка будем использовать[1]) определяется равенством

$$\blacklozenge \quad \tilde{\mathrm{d}}f(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda, \tag{2.21}$$

где $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ — произвольный касательный вектор. Другими словами, градиент функции f в некоторой точке P — это такой элемент из T^*_P, значение которого на элементе $\bar{V}$ из T_P равно производной f по направлению вектора $\bar{V}$ (т. е. вдоль кривой с касательным вектором $\bar{V}$). Нужно проверить, что это линейная функция на T_P, т. е. что выполнено (2.15):

$$\tilde{\mathrm{d}}f\left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right) = \left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right)f = a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} + b\frac{\mathrm{d}f}{d\mu}$$
$$= a\tilde{\mathrm{d}}f(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda) + b\tilde{\mathrm{d}}f(\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu).$$

Линейность доказана. На первый взгляд может показаться, что f сама есть один-форма, поскольку f и $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ дают число $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$. Но это неверно. Напомним читателю, что и T_P и T^*_P заданы в точке P, так что вся информация, необходимая для вычисления $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$, также должна быть задана в этой же точке. Но значение f в P не влияет на $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$. Чтобы вычислить $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$ в P, нужно знать $\partial f/\partial x^i$ в P, а это и есть, как мы увидим далее, компоненты градиента f.

Градиент позволяет нам дать наглядную интерпретацию один-форм, дополняющую наглядную интерпретацию векторов как стрелок. На рис. 2.23 изображён кусок топографической карты местности, представляющий собой набор горизонталей — линий равной высоты. Если обозначить через h высоту над уровнем моря, то градиент $\tilde{\mathrm{d}}h$, очевидно, наибольший в местах типа участка A, где линии наиболее плотно сближаются друг с другом, и наименьший в районе B, где горизонтали наиболее разрежены. Далее, пусть необходимо выяснить, насколько придётся подняться, двигаясь из одной точки в другую (близкую). Для этого на карте нужно провести линию (вектор $\Delta\bar{x}$) между этими точками. Тогда число горизонталей, которые пересечёт эта линия, даст изменение высоты. Например, линия 1 пересекает полторы горизонтали, а линия 2 — две. Линия 3 начинается там же, где и 2, но идёт в другом направлении, набирая высоты лишь на полгоризонтали. Эти числа: $1\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$ — и есть Δh, причём Δh линейно зависит от $\Delta\bar{x}$:

$$\Delta h = \sum \frac{\partial h}{\partial x^i}\Delta x^i.$$

---

[1]) Прекрасное обсуждение связи между $\tilde{d}f$ и df см. в книге **Spivak** (1970, vol. 1).

Это — *значение* $\tilde{d}h$ на $\Delta\bar{x}$ (см. (2.21) выше и (2.27) ниже). Следовательно, один-форму $\tilde{\omega}$ можно наглядно изобразить в виде семейства поверхностей (рис. 2.24), а её свёртка с вектором $\bar{V}$ есть число поверхностей, которые $\bar{V}$ пересекает. Чем ближе друг к другу поверхности, тем больше $\tilde{\omega}$. Собственно говоря, так же как вектор направлен по прямой, так и поверхности один-форм прямые (плоские) и параллельные. Это объясняется тем, что мы работаем с один-формами в точке, а не в протяжённой области, т. е. рассматриваем «касательные» один-формы, по аналогии с касательными векторами.

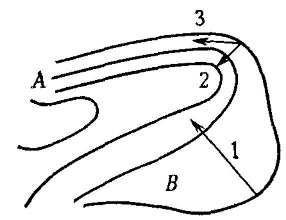


Рис. 2.23. Топографическая карта холмистой местности. Кривые на рисунке — это линии равной высоты над уровнем моря. Стрелками указаны возможные пути подъёма.



Рис. 2.24. "Касательная" один-форма $\tilde{\omega}$ может быть наглядно изображена в виде семейства параллельных плоскостей размерности, на единицу меньшей, чем размерность многообразия. Число плоскостей, пересекаемых вектором $\bar{V}$, равно свёртке $\langle\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle$.

Из этих рисунков видно, почему, вообще говоря, нельзя называть градиент вектором. Хотелось бы отождествить градиент с *вектором*, указывающим направление «вверх» по склону, т. е. с вектором, который пересекает наибольшее число горизонталей на единицу длины. Но обратите внимание на слова «на единицу длины». Если на многообразии имеется мера длины, то градиенту *можно* сопоставить вектор. Но если неизвестно, как сравнивать длины векторов, смотрящих в разных направлениях, то определить *направление* самого крутого подъёма нельзя, и в этом случае отличие градиента от вектора существенно. Поскольку мы, вообще говоря, не предполагаем наличие длины (или «метрики»), следует постоянно помнить о различии между векторами и один-формами. Мы вернёмся к этому вопросу в § 2.29.

2.20. БАЗИСНЫЕ ОДИН-ФОРМЫ И КОМПОНЕНТЫ ОДИН-ФОРМ

В векторном пространстве T_P^* один-форм в точке P любые n линейно-независимых один-форм образуют базис. Однако если уже выбран базис $\{\bar{e}_i, i = 1, \ldots, n\}$ в простран-

стве T_P векторов в точке P, то имеется привилегированный базис $\{\tilde{\omega}^i,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$ в T^*_P, называемый *двойственным* (или *дуальным*) *базисом*. Его определение таково. Если $\bar{V}$ — произвольный вектор в точке P, то $\tilde{\omega}^i$ даёт его i-ю компоненту:

$$\tilde{\omega}^i(\bar{V}) = V^i. \tag{2.22}$$

Легко видеть, что эта функция линейна по $\bar{V}$, поскольку i-я компонента, скажем, суммы $\bar{V}+\bar{W}$ равна V^i+W^i. Следовательно, (2.22) действительно определяет линейную функцию на T_P. В частности, поскольку базисный вектор $\bar{e}_j$ имеет лишь одну, j-ю, ненулевую компоненту, то

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_j) = \delta^i{}_j. \tag{2.23}$$

При помощи этого равенства базис $\{\tilde{\omega}^i\}$ обычно и определяется в учебниках. Отметим особо, что для нахождения любого $\tilde{\omega}^i$ надо знать *все* векторы $\{\bar{e}_j\}$. Изменение какого-то одного $\bar{e}_k$ меняет, вообще говоря, *все* базисные один-формы $\tilde{\omega}^i$. Мы построили соответствие между базисом и двойственным базисом, а не между индивидуальными векторами и соответствующими один-формами.

Пока не было доказано, что один-формы $\{\omega^i\}$ линейно-независимы и, значит, образуют базис. Это легко вытекает из (2.23), но мы пойдём другим, обходным путём. Рассмотрим любую один-форму $\tilde{q}$, действующую на произвольный вектор $\bar{V}$:

$$\tilde{q}(\bar{V}) = \tilde{q}\Big(\sum_j V^j\bar{e}_j\Big) = \sum_j V^j\tilde{q}(\bar{e}_j) = \sum_j \tilde{\omega}^j(\bar{V})\,\tilde{q}(\bar{e}_j). \tag{2.24}$$

Величины

$$q_j = \tilde{q}(\bar{e}_j) \tag{2.25}$$

называются *компонентами* $\tilde{q}$ в базисе, дуальном к $\{\bar{e}_j\}$. Для того чтобы убедиться в том, что это больше, чем просто аналогия с (2.22), перепишем (2.24) в виде

$$\tilde{q}(\bar{V}) = \sum q_j\tilde{\omega}^j(\bar{V}).$$

Поскольку один-форма *определяется* своими значениями на векторах, из этого равенства вместе с (2.16) вытекает, ввиду произвольности $\bar{V}$, что

◆ $$\tilde{q} = \sum_j q_j\tilde{\omega}^j. \tag{2.26}$$

Отсюда следует, что $\{\omega^j\}$ действительно образуют базис, поскольку их как раз n штук и любая один-форма $\tilde{q}$ представима в виде их линейной комбинации. Отсюда следует также, что

величины $\{q_i\}$ на самом деле являются компонентами $\tilde{q}$ относительно этого базиса в обычном смысле слова.

Самое важное то, что у нас есть теперь формула для вычисления значения $\tilde{q}(\bar{V})$ известным компонентам $\tilde{q}$ и $\bar{V}$:

$$\tilde{q}(\bar{V}) = \sum_j q_j V^j. \tag{2.27}$$

Как отмечалось выше, это есть свёртка $\bar{V}$ и $\tilde{q}$.

Разумеется, все эти рассуждения непосредственно переносятся на поля один-форм. Если совокупность векторных полей $\{\bar{e}_j\}$ образует базис в каждой точке некоторой области U многообразия M, то поля $\{\tilde{\omega}^j\}$, определяемые равенством (2.23), равным образом образуют базис в каждой точке из U. Данная система координат $\{x^i\}$ в области U определяет естественный базис векторных полей $\{\partial/\partial x^i\}$. Она же определяет естественное семейство один-форм — семейство, состоящее из n градиентов $\{\tilde{d}x^i\}$. Эти один-формы фактически образуют базис, дуальный к координатному базису векторов; действительно, в силу (2.21)

$$\tilde{d}x^i(\partial/\partial x^j) \equiv \partial x^i/\partial x^j = \delta^i{}_j \tag{2.28}$$

(второе равенство вытекает из свойств обычных частных производных).

В § 2.19 мы дали определение дифференцируемости поля один-форм. Теперь легко доказать, что $\tilde{q}$ есть форма класса C^∞, если и только если её компоненты $\{q^i\}$ относительно некоторого базиса из векторных полей класса C^∞ являются C^∞-функциями.

2.21. ИНДЕКСНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы используем следующие соглашения, касающиеся расстановки индексов. Компоненты векторов, например V^i, нумеруются верхними индексами; компоненты один-форм, например ω_j, — нижними. Базисные векторы нумеруются нижними индексами ($\bar{e}_j$), базисные один-формы — верхними ($\tilde{\omega}^j$) (Для координатных базисов мы получаем согласно этим правилам, что один-формы $\tilde{d}x^i$ нумеруются верхними индексами, как оно и должно быть; векторы $\partial/\partial x^j$ считаются имеющими нижние индексы, ибо они появляются в знаменателе как верхние.) Эти правила расстановки индексов очень полезны. Рассмотрим свёртку

$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = \sum_j V^j \omega_j,$$

представляющую собой сумму произведений, в которых один из сомножителей имеет верхний индекс, а другой — нижний. Мы примем *правило суммирования Эйнштейна*: если в некотором выражении какой-нибудь индекс встречается дважды — один раз как верхний, а другой — как нижний (такие индексы называют *повторяющимися*), то подразумевается, что по этому индексу производится суммирование. Таким образом, в выражениях

$$\tilde{\omega} = \omega_j \tilde{d}x^j, \quad \bar{V} = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \tilde{\omega}(\bar{V}) = V^j \omega_j$$

подразумевается суммирование. В выражениях

$$V^j W^k, \quad V^j \omega_i, \quad V^j W^j$$

никакого суммирования не производится; в первых двух вообще нет повторяющихся индексов, а в последнем оба индекса верхние. Использование правила Эйнштейна очень упрощает запись вычислений с компонентами, а наши правила расположения индексов минимизируют вероятность появления случайной ошибки при использовании этого правила.

Теперь мы в состоянии перейти от векторной алгебры к тензорной.

2.22. ТЕНЗОРЫ И ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Тензоры — естественное обобщение тех понятий, с которыми мы уже имели дело. Их алгебра устроена просто, и они имеют множество разнообразных применений. Главная проблема для тех, кто впервые сталкивается с тензорами, — это невозможность их «визуализации»: их трудно нарисовать. Выше мы выяснили, как изображать векторы и один-формы; те же приемы можно в той или иной мере перенести на тензоры более высоких «рангов», но картинки делаются крайне запутанными. По-видимому, в большинстве случаев лучше отказаться от попыток рисовать тензоры и работать с ними в рамках того определения, которое мы сейчас дадим, т. е. думать о тензорах как о линейных операторах на векторах и один-формах.

Рассмотрим точку P на M. Тензор типа $\binom{N}{N'}$ в точке P определяется как линейная функция, аргументами которой служат N один-форм и N' векторов, а значениями — вещественные числа. Это определение является обобщением данного выше для один-форм. Под «линейностью» мы понимаем здесь линейность по *каждому* аргументу (это свойство называют обычно полилинейностью). Например, если $\mathbf{F}$ — тензор

типа $\binom{2}{2}$, то его значение на один-формах $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\sigma}$ и векторах V и W записывается в виде

$$\mathsf{F}(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}).$$

Свойство линейности здесь означает, что (для произвольных чисел a и b)

$$\mathsf{F}(a\tilde{\omega} + b\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}) = a\mathsf{F}(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}) + b\mathsf{F}(\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}) \tag{2.29}$$

и аналогично для других аргументов. В случае если мы хотим иметь дело с F, не указывая явно аргументы, мы будем использовать обозначение $\mathsf{F}(\ ,\ ;\ ,\ )$, где на пустые места можно поставить любые аргументы соответствующего типа (один-формы до точки с запятой и векторы — после). Разумеется, порядок аргументов, вообще говоря, существен, как это видно уже на примере функций вещественных переменных (скажем, у функции $f(x, y) = 3x + 5y$ значения $f(1,2)$ и $f(2,1)$ различны).

Как и в случае векторов и один-форм, *тензорное поле* типа $\binom{N}{N'}$ — это правило, сопоставляющее каждой точке тензор типа $\binom{N}{N'}$ в этой точке. Свойство линейности тензоров распространяется и на тензорные поля, причём числа a и b в (2.29) в разных точках могут быть различными — они являются функциями на M. Дифференцируемость тензорных полей определяется так же, как и для один-форм (см. § 2.19).

Отметим, что векторы суть тензоры типа $\binom{1}{0}$: они являются линейными функциями на один-формах. Аналогично один-формы суть тензоры типа $\binom{0}{1}$. Скалярные функции на многообразии принято считать тензорами типа $\binom{0}{0}$ (см. § 2.28 «Функции и скаляры»). Тензор T типа $\binom{1}{1}$ предполагает наличие двух аргументов. Значение $\mathsf{T}(\tilde{\omega}; \bar{V})$ есть вещественное число; при фиксированном $\tilde{\omega}$ мы получаем один-форму $\mathsf{T}(\tilde{\omega};\ )$, поскольку сюда нужно подставить вектор, для того чтобы получить вещественное число; $\mathsf{T}(\ ; \bar{V})$ есть вектор. Таким образом, тензор типа $\binom{1}{1}$ можно рассматривать как линейную функцию на векторах со значениями в векторах, а также как линейную функцию на один-формах, принимающую значения также в один-формах. Такие трюки можно проделывать с любыми тензорами.

2.23. ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРОВ

Хотя понятие тензора, как оно определено выше, может показаться довольно абстрактным, оно весьма часто непосредственно приложимо к конкретным ситуациям. Мы приведём сейчас три примера, а чуть позже посвятим целый параграф (§ 2.29) обсуждению одного чрезвычайно важного тензора — метрического тензора.

(i) Наш первый пример — из матричной алгебры. Если вектор-столбцы считать векторами, а вектор-строки — один-формами, то матрицы суть тензоры типа $\binom{1}{1}$, так как, умножая матрицу на вектор, мы получаем вектор, а умножая её на вектор с одной стороны и на один-форму — с другой, получаем число.

Упражнение 2.4. Линейное преобразование в смысле матричной алгебры (например, ортогональное преобразование (вращение)) преобразует одну матрицу в другую. Покажите, что это индуцированное преобразование матриц есть тензор типа $\binom{2}{2}$.

(ii) Второй пример относится к упоминавшемуся в § 2.18 функциональному пространству $C[-1, 1]$. Линейный дифференциальный оператор (например, $x^2\mathrm{d}/\mathrm{d}x$) переводит функции (векторы этого пространства) в другие функции (векторы). Будучи линейным, этот оператор является тензором типа $\binom{1}{1}$ в этом пространстве.

(iii) Третий наш пример — тензор напряжений. Читатели, знакомые с теорией упругости, знают, что это такое. Если в деформированном материале выделить мысленно некоторую площадку, то тензор напряжений определяет вектор напряжения, действующий на этой площадке (силу на единицу площади, с которой материал по одну сторону площадки действует на материал по другую её сторону). Так как площадка — это поверхность, а поверхности представляются один-формами, то тензор напряжений оказывается линейной функцией на один-формах, принимающей значения в векторах, т. е. тензором типа $\binom{2}{0}$.

2.24. КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРОВ И ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Простейший пример тензора типа $\binom{2}{0}$ строится так: берём два вектора $\bar{V}$ и $\bar{W}$ и определяем тензор $\bar{V} \otimes \bar{W}$ как тензор, значение которого на двух один-формах $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ равно

произведению $\bar{V}(\tilde{p})\,\bar{W}(\tilde{q})$:

$$\bar{V} \otimes \bar{W}(\tilde{p}, \tilde{q}) \equiv \bar{V}(\tilde{p})\,\bar{W}(\tilde{q}). \qquad (2.30)$$

Операция $\otimes$ называется *тензорным* (или *внешним*) *произведением*. Её обобщение на случай произвольного числа тензоров произвольного типа очевидно. Тензорным произведением тензора типа $\binom{N}{M}$ и тензора типа $\binom{N'}{M'}$ будет тензор типа $\binom{N+N'}{M+M'}$.

Компонентами тензора называются его значения на базисных векторах и один-формах. Скажем, если S — тензор типа $\binom{3}{2}$, то его компоненты относительно базиса $\{\bar{e}_i\}$ имеют вид

◆ $$S^{ijk}{}_{lm} \equiv \mathsf{S}(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j, \tilde{\omega}^k; \bar{e}_l, \bar{e}_m). \qquad (2.31)$$

Если порядок аргументов тензора S существенен, то существенным является и порядок индексов у компонент $S^{ijk}{}_{lm}$.

Обобщение понятия компоненты на тензорные поля и определение дифференцируемости тензорных полей совершенно аналогичны случаю один-форм (см. § 2.20).

Упражнение 2.5. (a) Докажите, что общий тензор типа $\binom{2}{0}$ нельзя представить в виде тензорного произведения двух векторов. (Указание: подсчитайте число компонент тензора типа $\binom{2}{0}$.)

(b) Докажите, что тензор $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$ типа $\binom{1}{1}$ имеет компоненты $V^i\omega_j$.

Упражнение 2.6. Докажите, что тензоры типа $\binom{2}{0}$ в точке P образуют векторное пространство относительно сложения, определённого аналогично (2.16b). Докажите, что тензоры $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ образуют базис этого пространства. (Таким образом, хотя общий тензор типа $\binom{2}{0}$ и не представляется в виде тензорного произведения, он представляется в виде *линейной комбинации* тензорных произведений.) Это векторное пространство обозначается через $T_P \otimes T_P$.

2.25. СВЁРТКА

Как было указано в упр. 2.5, величины $\{V^i\omega_j\}$ являются компонентами тензора типа $\binom{1}{1}$. Суммируя "диагональные" компоненты $(i = j)$, получим $V^i\omega_i$ — число, не зависящее от

базиса, а именно значение $\tilde{\omega}$ на $\bar{V}$, которое можно считать тензором типа $\binom{0}{0}$. Аналогично, если $S^i{}_{jk}$ и P^{lm} — компоненты тензоров типа $\binom{1}{2}$ и $\binom{2}{0}$ соответственно, то $S^i{}_{jk}P^{lm}$ суть компоненты тензора типа $\binom{3}{2}$, $S^i{}_{jk}P^{jm}$ — компоненты тензора типа $\binom{2}{1}$, $S^i{}_{jk}P^{lj}$ — компоненты другого тензора типа $\binom{2}{1}$ и т. д. По аналогии с формулой (2.27) эта операция называется *свёрткой*; она позволяет получать новые тензоры из уже имеющихся.

Дадим доказательство независимости свёртки от выбора базиса. Рассмотрим тензор **A** типа $\binom{2}{0}$, тензор **B** типа $\binom{0}{2}$ и их свёртку (относительно некоторого базиса) $A^{ij}B_{jk}$. Мы утверждаем, что это — компоненты тензора **C** типа $\binom{1}{1}$, такого что для произвольных вектора $\bar{V}$ и один-формы $\tilde{\sigma}$

$$\mathbf{C}(\tilde{\sigma}; \bar{V}) = \Big(\sum_j A^{ij}B_{jk}\Big)\sigma_i V^k = \sum \mathbf{A}(\tilde{\sigma}, \tilde{\omega}^j)\,\mathbf{B}(\bar{e}_j, \bar{V}).$$

В силу линейности **A** по второму аргументу это можно переписать в виде

$$\mathbf{C}(\tilde{\sigma}; \bar{V}) = \mathbf{A}\Big(\tilde{\sigma}, \sum_j \mathbf{B}(\bar{e}_j, \bar{V})\,\tilde{\omega}^j\Big),$$

так как величины $\mathbf{B}(\bar{e}_j, \bar{V})$ суть просто числа. Но в § 2.20 мы по сути дела доказали, что независимо от выбора базиса

$$\sum_j (\bar{e}_j, \bar{V})\,\tilde{\omega}^j = B(\ \ , \bar{V}),$$

где правая часть является один-формой (при фиксированном $\bar{V}$) — на пустое место нужно подставлять вектор. Эта один-форма стоит в качестве одного из аргументов в **A**, так что

$$A^{ij}\,B_{jk} = C^i{}_k \Longleftrightarrow \mathbf{C}(\tilde{\sigma};\ \bar{V}) = \mathbf{A}(\tilde{\sigma}, \mathbf{B}(\ \ , \bar{V})),$$

независимо от выбора базиса (см. упр. 2.8).

Упражнение 2.7. Сколько тензоров типа $\binom{2}{1}$ можно получить свёрткой по паре индексов из тензора $Q^{ijk}{}_{lm}$ типа $\binom{3}{2}$? Сколько тензоров типа $\binom{1}{0}$, если выполнить ещё одну свёртку?

Упражнение 2.8. Пусть **A** и **B** — два тензора типа $\binom{1}{1}$; будем рассматривать их как линейные функции от век-

торов со значениями в векторах: если $\bar{V}$ — вектор, то $\mathsf{A}(\bar{V})$ и $\mathsf{B}(\bar{V})$ — векторы. Покажите, что если определить $\mathsf{C}(\bar{V})$ равенством

$$\mathsf{C}(\bar{V}) = \mathsf{B}(\mathsf{A}(\bar{V})),$$

то C — тоже тензор типа $\binom{1}{1}$. Покажите, что его компоненты имеют вид

$$C^i_j = B^i_k A^k_j.$$

Выясните связь всего этого с линейными преобразованиями (см. § 1.6).

2.26. ЗАМЕНА БАЗИСА

В фокусе старого определения тензора — поведение компонент тензора при замене базиса. Это определение было позднее заменено на то, которое мы привели выше; насколько же далеки друг от друга эти две концепции, раз мы только сейчас дошли до замен базиса! Нельзя сказать, чтобы преобразования компонент тензора при замене базиса были не важны. В большинстве практических вычислений с тензорами используются их компоненты, и необходимо понимать, как они преобразуются.

Рассмотрим векторы и тензоры, определённые в некоторой точке P многообразия M. Пусть у нас был один базис векторов $\{\bar{e}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ и мы хотим перейти от него к другому базису $\{\bar{e}_{j'},\ j' = 1, \ldots, n\}$. (Штрихи у индексов будут служить признаком, позволяющим отличить то, что относится к одному базису, от того, что относится к другому.) Тогда в T_P возникает линейное преобразование Λ от старого базиса к новому:

$$\bar{e}_{j'} = \Lambda^i{}_{j'} \bar{e}_i. \qquad (2.32)$$

Матрица $\Lambda^i{}_{j'}$ невырожденна (иначе векторы $\{e_{j'}\}$ были бы линейно-зависимы), а в остальном произвольна. Это не есть набор компонент какого-либо тензора, поскольку индексы относятся к двум различным базисам. Эта матрица называется *матрицей преобразования.*

Старый базис один-форм удовлетворяет условию (2.23):

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_k) = \delta^i{}_k.$$

Умножая на $\Lambda^k{}_{j'}$ и используя (2.32), получаем в силу линейности один-форм

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_{j'}) = \delta^i{}_k \Lambda^k{}_{j'} = \Lambda^i{}_{j'}. \qquad (2.33)$$

Далее, матрица $\Lambda^{i}{}_{j'}$ обратима. Обозначим обратную матрицу через $\Lambda^{k'}{}_{j}$:

$$\Lambda^{k'}{}_{j}\Lambda^{j}{}_{i'} = \delta^{k'}{}_{i'},\ \Lambda^{k'}{}_{i}\Lambda^{i}{}_{k'} = \delta^{i}{}_{j}, \tag{2.34}$$

Умножая (2.33) на $\Lambda^{k'}{}_{j}$, получим

$$\Lambda^{k'}{}_{i}\tilde{\omega}^{i}(\bar{e}_{j'}) = \delta^{k'}{}_{j'};$$

сравнивая с (2.33), заключаем, что

◆ $$\tilde{\omega}^{k'} = \Lambda^{k'}{}_{i}\tilde{\omega}^{i}. \tag{2.35}$$

Эта формула двойственна формуле (2.32): базисные один-формы преобразуются по закону, *противоположному* закону преобразования базисных векторов (противоположному в том смысле, что используется матрица, обратная к матрице преобразования); тогда в обоих базисах выполняется соотношение (2.23).

Теперь уже совсем просто найти, как преобразуются компоненты:

$$V^{i'} = \tilde{\omega}^{i'}(\bar{V}) = \Lambda^{i'}{}_{j}\tilde{\omega}^{j}(\bar{V}) = \Lambda^{i'}{}_{j}V^{j}, \tag{2.36}$$

$$q_{k'} = \tilde{q}(\bar{e}_{k'}) = \tilde{q}(\Lambda^{j}{}_{k'}\bar{e}_{j}) = \Lambda^{j}{}_{k'}\tilde{q}(\bar{e}_{j}) = \Lambda^{j}{}_{k'}q_{j} \tag{2.37}$$

и аналогично для тензоров более высокого «ранга» (см. упр. 2.9 ниже). Мы видим, что компоненты векторов и базисные один-формы преобразуются по *одному и тому же* закону, который противоположен (т. е. использует обратную матрицу) закону, по которому преобразуются компоненты один-форм и базисные векторы. Это и понятно, так как суммы вида $V^{i}\bar{e}_{i}$, $V^{j}\tilde{\sigma}_{j}$ и т. д. не должны зависеть от базиса. Это демонстрирует ещё одно преимущество наших правил расположения индексов и нашего правила суммирования: расположение индексов автоматически определяет закон преобразования. Например, V^{i} и $\tilde{\omega}^{j}$ подчиняются одному закону преобразования, а именно

$$V^{i'} = \Lambda^{i'}{}_{j}V^{j}.$$

Матрицу $\Lambda^{i}{}_{j'}$ здесь *не поставишь*, так как суммирование должно вестись по нештрихованному индексу, который должен появляться один раз вверху и один раз внизу.

Эти взаимно противоположные законы преобразования в более старой литературе именуются «контравариантными» и «ковариантными». То, что мы называем просто векторами, раньше называли «контравариантными векторами», поскольку закон преобразования их компонент противоположен («контра»!) закону преобразования базисных векторов. Ана-

логично один-формы назывались «ковариантными векторами», поскольку их компоненты преобразуются так же, как базисные векторы. При современном изложении подчёркивается тот факт, что ни векторы, ни один-формы не меняются при замене базиса; это геометрические объекты, не зависящие от выбора системы координат. Итак, от использования старых названий в современной терминологии отказались потому, что в них делается чрезмерно сильный акцент на описаниях, зависящих от выбора системы координат.

Упражнение 2.9. Покажите, что у произвольного тензора типа $\binom{2}{0}$ компоненты преобразуются так же, как у тензорного произведения двух векторов, т. е.

$$T^{i'j'} = \Lambda^{i'}{}_k \Lambda^{j'}{}_l T^{kl}. \tag{2.38}$$

Обобщите эту формулу на случай тензоров типа $\binom{N}{N'}$.

Упражнение 2.10. Покажите, что если у тензора все компоненты в некотором базисе равны нулю, то они равны нулю и в любом другом базисе (такой тензор является нулевой линейной функцией (см. § 2.22) и, естественно, называется *нулевым*). (Отсюда вытекает, что если компоненты двух тензоров в некотором базисе совпадают, то эти тензоры равны.)

Упражнение 2.11. Для данного базиса $\{\bar{e}_i\}$ векторного n-мерного пространства рассмотрим совокупность чисел $\{A^i{}_j,\ i,\ j = 1, \ldots, n\}$. Для любого другого базиса $\{\bar{e}_{j'}\}$, связанного с исходным матрицей перехода $\Lambda^i{}_{j'}$ построим совокупность чисел вида $A^{i'}{}_{k'} = \Lambda^{i'}{}_j \Lambda^l{}_{k'} A^j{}_l$. Докажите, что существует тензор **A**, компоненты которого в базисе $\{\bar{e}_{j'}\}$ равны $A^{i'}{}_{k'}$. Из сказанного вытекает, что можно считать тензор просто *набором чисел* $A^i{}_j$, *преобразующихся по определённому закону*. Это другая форма того определения, которым мы пользуемся.

Особенно интересно рассмотреть эти преобразования базисов для случая, когда они происходят из координатных преобразований, о которых упоминалось в конце § 2.6. Пусть в области U многообразия M задана координатная система $\{x^i,\ i = 1, \ldots, n\}$; введём новые функции $\{y^{i'},\ i' = 1, \ldots, n\}$, задаваемые формулами

$$y^{i'} = f^{i'}(x^1, \ \ldots, \ x^n), \ i' = 1, \ \ldots, \ n, \tag{2.39}$$

или, кратко, $y^{i'} = f^{i'}(x^j)$. Эти формулы задают преобразование координат, если определитель матрицы Якоби $\partial y^{i'}/\partial x^j$ не

обращается в нуль в U. Данную точку $P \in U$ можно описать двумя различными совокупностями чисел: $\{x^i\}$ или $\{y^{i'}\}$. Равным образом в точке P имеются два различных координатных базиса: $\{\partial/\partial x^i\}$ и $\{\partial/\partial y^{i'}\}$. В силу цепного правила,

$$\frac{\partial}{\partial y^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial y^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{2.40}$$

Сравнивая с (2.32), заключаем, что

$$\Lambda^i{}_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}}. \tag{2.41}$$

Аналогично, обратная матрица имеет вид

$$\Lambda^{k'}{}_j = \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^j}, \tag{2.42}$$

как легко проверить, используя цепное правило для частных производных:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}} \frac{\partial y^{j'}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta^i{}_k.$$

Важно уяснить, что (2.42) охватывает лишь некоторый специальный класс полей преобразований $\Lambda^{k'}{}_j$ в U. В каждой отдельной точке P из U можно произвольно выбрать все n^2 элементов $\Lambda^{k'}{}_j$ (лишь бы не обращался в нуль определитель), но этого нельзя сделать в целой окрестности точки P, поскольку из (2.42) вытекает, что

$$\partial \Lambda^{k'}{}_j / \partial x^l = \partial \Lambda^{k'}{}_l / \partial x^j, \tag{2.43}$$

а это равенство вовсе не обязано выполняться для *произвольного* поля $\Lambda^{k'}{}_j$. Это — новая иллюстрация того, что не каждый набор базисных векторных полей является координатным.

2.27. ТЕНЗОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПОНЕНТАМИ

Пусть тензор T в некотором базисе имеет компоненты $\mathsf{T}^{i \cdots}{}_{j \dots}\}$. Умножив эти компоненты на число a, получим $a\mathsf{T}^{i \cdots}{}_{j \dots}\}$. Ясно, что это — компоненты тензора $a\,\mathsf{T}$; отсюда вытекает, что операция умножения всех компонент T на a *инвариантна относительно замены базиса*: начни мы вычислять в других координатах $\{y^i\}$, мы всё равно получили бы компоненты тензора $a\,\mathsf{T}$ в этих новых координатах. (Если бы мы умножили на a лишь *некоторые* из компонент $\{\mathsf{T}^{i \cdots}{}_{j \dots}\}$, то указанная инвариантность уже не имела бы места.) Таким образом, операция $\{\mathsf{T}^{i \cdots}{}_{j \dots}\} \mapsto \{a\mathsf{T}^{i \cdots}{}_{j \dots}\}$ в точности соот-

ветствует инвариантной относительно выбора базиса операции $\mathbf{T} \longmapsto a\,\mathbf{T}$. Аналогично операции взятия тензорного произведения двух тензоров

$$\mathbf{A},\ \mathbf{B} \longmapsto \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$$

отвечает однозначно определённая операция над компонентами (см. упр. 2.4.)

$$\{A^{i\,\cdots}{}_{j\,\ldots}\},\ \{B^{k\,\cdots}{}_{l\,\ldots}\} \longmapsto \{A^{i\,\cdots}{}_{j\,\ldots}B^{k\,\cdots}{}_{l\,\ldots}\}$$

(независимо от того, является ли используемый базис координатным или некоординатным). Более общо, операция над компонентами, дающая компоненты *одного и того же* тензора, независимо от выбора базиса, называется *тензорной операцией*; далее мы будем иметь дело только с такими операциями. Приведём список алгебраических тензорных операций (дифференциальные тензорные операции мы рассмотрим попозже):

(i) сложение (и вычитание) компонент тензоров одинакового типа;
(ii) умножение всех компонент тензора на данное число (даёт тензор того же типа);
(iii) умножение компонент двух тензоров (даёт тензор, тип которого является «суммой» типов сомножителей);
(iv) свёртка по паре индексов, один из которых верхний, а другой — нижний.

Уравнения (равенства), в которых тензорные компоненты комбинируются только при помощи этих операций, называются *тензорными уравнениями* (*равенствами*). Из упр. 2.10 вытекает, что если в результате некоторой последовательности тензорной операции над компонентами в некотором базисе мы получили тензорное равенство, то это равенство будет уместно и во всех других базисах. Ввиду этого базис обычно выбирают из соображений удобства вычислений.

2.28. ФУНКЦИИ И СКАЛЯРЫ

Скаляры — это тензоры типа $\binom{0}{0}$, т. е. функции на многообразии, определение которых инвариантно относительно выбора базиса. Например, свёртка $V^i\omega_i$ — скаляр, поскольку её значение не зависит от выбора базиса, в котором производится вычисление. Наоборот, хотя компонента V^1 также является функцией на многообразии, у которой в каждой точке определено численное значение, она — не скаляр, поскольку это значение зависит от выбора базиса. Иначе говоря, суще-

ствует некоторая (скалярная) функция $f(P)$, такая что $V^1(P) = f(P)$, где первая компонента (индекс 1) взята по отношению к некоторому заданному базису; если выбрать другой базис, то новая $V^1(P)$ не будет равняться $f(P)$. Таким образом, $f(P)$ есть скаляр, значение которого случайно оказалось равным первой компоненте поля V в некотором базисе. Но сама эта первая компонента V^1 не является скаляром, поскольку её значения зависят от выбора базиса. Итак, мы видим, что вопрос о том, является данная величина скаляром или же просто функцией, зависит от её интерпретации в смысле поведения при замене базиса, а не от её численных значений.

2.29. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Наиболее часто в векторной алгебре рассматривается скалярное произведение между векторами (см. § 1.5). Это — правило, сопоставляющее число паре векторов. Это число линейно зависит от каждого из векторов. Значит, это есть тензор типа $\binom{0}{2}$; его называют *метрическим тензором* и обозначают через g. Итак, мы полагаем по определению

$$\mathrm{g}(\bar{V}, \bar{U}) = \mathrm{g}(\bar{U}, \bar{V}) \equiv \bar{U} \cdot \bar{V}. \tag{2.44}$$

Первое из этих равенств выражает требование, чтобы величина $\bar{U} \cdot \bar{V}$ не зависела от порядка сомножителей $\bar{U}$ и $\bar{V}$. Другими словами, g — симметрический тензор. Его компоненты в базисе $\{\bar{e}_i\}$ имеют вид

$$\mathrm{g}_{ij} = \mathrm{g}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j. \tag{2.45}$$

Эти компоненты образуют симметричную матрицу размера $n \times n$. По причинам, которые будут объяснены ниже, мы требуем также, чтобы матрица была обратимой. Если окажется, что эта матрица единичная, т. е.

$$g_{ij} = \delta_{ij},$$

то метрический тензор называется *эвклидовой метрикой*, а векторное пространство — *эвклидовым пространством*. А как быть, если g_{ij} не имеет такого простого вида? Всегда можно попытаться выбрать новый базис $\{\bar{e}_{j'}\}$, в котором новые компоненты

$$g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'} \Lambda^l{}_{j'} g_{kl} \tag{2.46}$$

принимают наиболее простой вид. Рассмотрим это соотношение как матричное уравнение. А именно перепишем его в виде

$$g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'} g_{kl} \Lambda^l{}_{j'}.$$

Из результатов § 1.6 ясно, что это — матричное уравнение

$$g' = \Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda, \tag{2.47}$$

где Λ^{T} — матрица, транспонированная к матрице $\Lambda = (\Lambda^{k}{}_{i'})$. Покажем, что если с умом выбрать матрицу Λ, то матрицу g' можно привести к весьма простому виду. Возьмём Λ в виде

$$\Lambda = OD, \tag{2.48}$$

где O — ортогональная матрица ($O^{\mathrm{T}} = O^{-1}$), а D — *диагональная матрица* (так что, в частности, $D^{\mathrm{T}} = D$). Из (1.41) вытекает, что

$$\Lambda^{\mathrm{T}} = (OD)^{\mathrm{T}} = D^{\mathrm{T}} O^{\mathrm{T}} = DO^{-1}$$

и

$$g' = DO^{-1} g O D. \tag{2.49}$$

Хорошо известно, что любую симметричную матрицу, и в частности g, можно привести к диагональному виду g_{d} преобразованием подобия, осуществляемым при помощи ортогональной матрицы; вот и возьмём в качестве O такую ортогональную матрицу:

$$g_{\mathrm{d}} = O^{-1} g O,$$

$$g' = D g_{\mathrm{d}} D.$$

Если $g_{\mathrm{d}} = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_n)$ и наша пока ещё не определённая матрица D равна $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, то

$$g' = \mathrm{diag}\left(g_1 d_1^2, g_2 d_2^2, \ldots, g_n d_n^2\right). \tag{2.50}$$

Положим теперь $d_j = (|g_j|)^{-1/2}$, так что каждый элемент диагональной матрицы g' равен $+1$ или -1. При помощи d_j можно изменять лишь величины диагональных элементов g_j, но не их знаки. Далее, диагональные элементы матрицы g_{d} являются *собственными числами* матрицы g и определены однозначно с точностью до порядка. Более того, поскольку матрица g обратима, ни одно из этих собственных чисел не равно нулю. Если выбрать матрицу O так, чтобы сначала шли отрицательные собственные значения, то мы приходим к следующей теореме: *любое векторное пространство с метрическим тензором обладает базисом, в котором этот тензор представляется в каноническом виде* $\mathrm{diag}(-1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1)$. Такой базис называется *ортонормированным*. Сумма этих диагональных элементов — след матрицы канонического представления — называется *сигнатурой* метрики.

Упражнение 2.12. Найдите матрицы Λ, приводящие следующие матрицы к диагональной форме:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Доказанная теорема очень важна. Из неё вытекает, что имеется лишь весьма малое число различных типов метрических тензоров в данном векторном пространстве. Если метрика положительно-определённа, то в её канонической форме всюду стоят $+1$ и пространство является эвклидовым. Если метрика отрицательно-определённа, то она тоже называется эвклидовой, так как существенно важно лишь то, одинаковы все знаки или нет. Если не все знаки одинаковы, то метрика называется *индефинитной*. Важный пример — каноническая форма $(-1, 1, \ldots, 1)$; такая метрика называется обычно *метрикой Минковского*; такова метрика пространства специальной теории относительности (размерности $n = 4$), которое мы вскоре рассмотрим более подробно.

Ещё одно следствие теоремы о приведении к каноническому виду — выделение одного привилегированного класса *базисов*, векторного пространства, а именно класса *ортонормированных* базисов. В эвклидовом пространстве E^n такие базисы называют *декартовыми*. В таком базисе метрический тензор имеет компоненты $g_{ij} = \delta_{ij}$, или, в матричном виде, $g = I$. Матрица преобразования Λ_C от одного такого базиса к другому такому же[1] удовлетворяет соотношению

$$I = \Lambda_C^T I \Lambda_C, \quad \text{или} \quad \Lambda_C^T = \Lambda_C^{-1}. \tag{2.51}$$

Таким образом, преобразования между декартовыми базисами задаются ортогональными матрицами. Эти матрицы образуют группу (произведение двух ортогональных матриц ортогонально), называемую ортогональной группой и обозначаемую через $O(n)$.

Аналогичным образом в пространстве с метрикой Минковского выделены псевдоэвклидовы (или *лоренцевы*) базисы, в которых компоненты метрики образуют матрицу вида

$$\eta = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1). \tag{2.52}$$

Матрица перехода Λ_L от одного псевдоэвклидова базиса к другому[2] удовлетворяет соотношению

$$\eta = \Lambda_L^T \eta \Lambda_L. \tag{2.53}$$

Такие преобразования называются *преобразованиями Лоренца*. Нетрудно показать, что они также образуют группу, называемую *группой Лоренца* и обозначаемую $L(n)$ или $O(n-1, 1)$.

С точки зрения тензорной алгебры наиболее важная роль метрических тензоров, о которой мы ещё не упоминали, — это то, что они устанавливают взаимно-однозначное соответ-

[1] Индекс C — от Cartesian (декартов). — *Прим. ред.*

[2] Индекс L — от Lorentz. — *Прим. ред.*

ствие между векторами и один-формами Фиксируем какой-нибудь вектор $\bar{V}$ Тогда $\mathrm{g}(\bar{V},\ )$ является при этом фиксированном $\bar{V}$ вещественнозначной линейной функцией от векторов, т. е. один-формой. Обозначим её через $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = \mathrm{g}(\bar{V},\quad). \tag{2.54}$$

Невырожденность матрицы g_{ij}, которую мы потребовали выше, гарантирует взаимную однозначность этого отображения: имеется только один вектор $\bar{V}$, который переходит в $\tilde{V}$. Чтобы убедиться в этом, запишем последнее равенство в компонентах Обозначим компоненты $\tilde{V}$ через V_i. Тогда

$$V_i = \tilde{V}(\bar{e}_i) = \mathrm{g}(\bar{V},\ \bar{e}_i) = \mathrm{g}(V^j\bar{e}_j,\ e_i)$$
$$= V^j\mathrm{g}(\bar{e}_j,\ \bar{e}_i) = V^j g_{ji} = g_{ij}V^j$$

(последнее равенство вытекает из симметричности g). Обозначим через g^{ij} матрицу, обратную к g_{ij}:

◆ $$g^{ij}g_{jk} = \delta^i{}_k. \tag{2.55}$$

Имеем

$$g^{ki}V_i = g^{ki}g_{ij}V^j = \delta^k{}_jV^j = V^k, \tag{2.56}$$

откуда и вытекает обратимость отображения $\bar{V} \mapsto \tilde{V}$. Итак, метрика позволяет однозначно отождествить векторы с один-формами Соответствие между «отождествляемыми» вектором и один-формой выражается так

◆ $$V_i = g_{ij}V^j, \tag{2.57}$$

◆ $$V^j = g^{jk}V_k. \tag{2.58}$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство То что мы обозначили элементы обратной матрицы через g^{ij}, позволило нам записать тензорное равенство (2.58), следуя обычным правилам суммирования Но для полноты следует показать, что величины g^{ij} действительно образуют компоненты тензора типа $\binom{2}{0}$. Это и составляет содержание следующего упражнения

Упражнение 2.13. (a) Покажите, что $\{g^{ij}\}$ суть компоненты некоторого тензора g^{-1} типа $\binom{2}{0}$, — либо удостоверившись, что они преобразуются должным образом при замене базиса, либо установив, что они определяют билинейную функцию на один-формах.

(b) Покажите, что если базис векторов $\{\bar{e}_i\}$ ортонормирован, то и дуальный базис один-форм $\{\tilde{\omega}^i\}$ тоже ортонормирован, в том смысле, что $\mathrm{g}^{-1}(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j) = \pm\delta^{ij}$.

Аналогично с помощью метрики можно превратить любой тензор **A** типа $\binom{2}{0}$ в тензор типа $\binom{1}{1}$:

$$A^i{}_j = g_{jk}A^{ik}. \tag{2.59}$$

Этот тензор в свою очередь можно превратить в тензор типа $\binom{0}{2}$:

$$A_{lj} = g_{lm}A^m{}_j = g_{lm}g_{jk}A^{mk}, \tag{2.60}$$

а от него вернуться к исходному тензору

$$A^{ik} = g^{il}g^{km}A_{lm}. \tag{2.61}$$

Эти преобразования называются *операциями поднятия* и *опускания индексов*; принято обозначать все эти тензоры одной и той же буквой (например, **A**), различая их между собой только расположением индексов у компонент. В векторном пространстве с метрикой иногда бывает неважно, имеет тензор тип $\binom{N}{N'}$, или $\binom{N-1}{N'+1}$, или $\binom{N+1}{N'-1}$ и т. д.; всё определяется в таком случае числом $N+N'$, которое называется *рангом* тензора.

В эвклидовом пространстве в декартовом базисе $g_{ij} = \delta_{ij}$, так что $g^{ij} = \delta^{ij}$ и $V^i = V_i$ — между компонентами вектора и ассоциированной с ним один-формы нет никакой разницы. Именно этим объясняется то, почему в элементарных курсах эвклидовой векторной алгебры не делается различия между векторами и один-формами, а также то, почему в таких курсах ограничиваются ортонормированными базисами. Но в неортонормированном базисе в эвклидовом пространстве и в *любом* базисе в пространстве с индефинитной метрикой компоненты один-формы могут быть совсем отличными от компонент соответствующего вектора. Интересный пример такой ситуации встретится нам в § 2.31, посвящённом специальной теории относительности.

2.30. ПОЛЕ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА НА МНОГООБРАЗИИ

Метрическое тензорное поле **g** на многообразии — это симметрическое тензорное поле типа $\binom{0}{2}$, обратимое в каждой точке. В каждой точке P оно задает метрику в касательном пространстве T_P, для которой справедливы все свойства, обсуждавшиеся в предыдущем параграфе. Но оно задаёт ещё много сверх того.

Выделение некоторого тензорного поля типа $\binom{0}{2}$ на многообразии M в качестве его метрики снабжает M чрезвычайно богатой структурой. Многообразие сразу же делается «жёстким»; на нём становится возможным определить такие понятия, как расстояние (см. ниже) и кривизна (см. гл. 6). Эти понятия настолько важны для многих приложений, особенно для общей теории относительности, что всякий физик почти наверняка знаком с такого рода геометрией. Но с точки зрения дифференциальной геометрии эти понятия являются структурами «более высокого уровня»: выделяя определённое тензорное поле на особое положение, мы выходим за рамки «чистого» дифференцируемого многообразия. При таком подходе можно проглядеть богатую геометрическую структуру, которой обладает обычное многообразие. Такие важные вещи, как производные Ли и дифференциальные формы, не имеют никакого отношения к метрике. Соответственно мы будем стараться в этой книге всюду, где только можно, обойтись без привлечения метрического тензора, даже в приложениях к многообразиям, на которых он задан. В этом параграфе мы лишь коротко рассмотрим его простейшие свойства, а более подробное изучение метрической геометрии отложим до гл. 6.

Метрический тензор может быть дифференцируемым столько раз, сколько потребуется, но во всяком случае он должен быть непрерывным. Отсюда следует, что его канонический вид должен быть всюду одинаков, поскольку он определяется целочисленными параметрами, которые не могут меняться непрерывно. Поэтому можно говорить о *сигнатуре* поля $\mathfrak{g}$. Если допустить, что матрицу преобразования Λ можно выбирать в каждой точке независимо, то можно перейти от любого базиса векторных полей к глобально ортонормированному базису, в котором компоненты $\mathfrak{g}$ канонические. Но такое преобразование Λ не будет, вообще говоря, координатным (т. е. не будет удовлетворять (2.43)); на самом деле, в общем случае нельзя найти координатный базис, являющийся также ортонормированным в некоторой открытой области U многообразия M (см. упр. 2.14). Очевидным исключением является R^n, рассматриваемое как многообразие с эвклидовой метрикой δ_{ij} в каждой точке. Но даже и в этом случае только декартовы координаты задают ортонормированный базис. Соответствующий пример был дан в упр. 2.1, где были рассмотрены полярные координаты в R^2. Координатный базис ортогонален, но не нормирован. А если его нормировать, то он перестаёт быть координатным.

Упражнение 2.14. Покажите, что всякое метрическое тензорное поле $\mathfrak{g}$ класса C^∞ является *локально-плоским*, в

том смысле, что в некоторой окрестности любой точки P существует система координат, в которой компоненты g_{ij} обладают следующими свойствами:

(i) $g_{ij}(P) = \pm\delta_{ij}$ (ортонормированность в точке P);

(ii) $\left.\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right|_P = 0$ (ортонормированность в первом приближении вблизи P);

(iii) $\left.\dfrac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}\right|_P$ необязательно все равны нулю (система координат, вообще говоря, не является подлинно ортонормированной).

Упражнение 2.15. Пусть на эвклидовой плоскости заданы полярные координаты. Найдите компоненты метрики

(a) в базисе $\{\partial/\partial r, \partial/\partial\theta\}$;

(b) в базисе $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ из упр. 2.1; выразите $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ через $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial\theta$.

Упражнение 2.16. Найдите компоненты один-формы $\tilde{\mathrm{d}}f$ и соответствующего ей вектора $\overline{\mathrm{d}}f$ в обоих базисах из упр. 2.15.

Здесь следует сделать одно предостережение. В большинстве руководств, где излагается векторное исчисление в криволинейных координатах в эвклидовом пространстве, используются компоненты векторов в таких вот ортонормированных (но, вообще говоря, не координатных) базисах. Это позволяет не делать различия между векторами и один-формами. Но при сравнении выражений, которые мы получим ниже для, скажем, дивергенции векторного поля через его компоненты, с выражениями, приводимыми в других руководствах, следует иметь в виду возможное различие базисов.

Важным свойством метрики является то, что с её помощью можно определить понятие длины на многообразии. Если $\bar{V} = \mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\lambda$ — касательный вектор к данной кривой, то перемещению $\mathrm{d}\lambda$ отвечает квадрат длины

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l^2 &\equiv \mathrm{d}\bar{x}\cdot\mathrm{d}\bar{x} = (\bar{V}\mathrm{d}\lambda)\cdot(\bar{V}\mathrm{d}\lambda) \\ &= \bar{V}\cdot\bar{V}(\mathrm{d}\lambda)^2 = \mathsf{g}(\bar{V}, \bar{V})\,\mathrm{d}\lambda^2 \end{aligned} \tag{2.62}$$

(Здесь d — символ бесконечно малой величины, а не градиента.) Если метрика положительно-определённа, то $\mathsf{g}(\bar{V}, \bar{V}) > 0$ для всех $\bar{V} \neq 0$. В этом случае $\mathrm{d}l^2$ положительно, и мы имеем для элемента длины кривой выражение

$$\mathrm{d}l = (\mathsf{g}(\bar{V}, \bar{V}))^{1/2}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{2.63}$$

Однако в случае индефинитной метрики квадрат длины уже не имеет определённого знака. Кривые могут иметь как поло-

жительное $\mathrm{d}l^2$ ("пространственно-подобные" кривые), так и отрицательное ("времени-подобные"). В таком случае можно считать вещественное число

$$\mathrm{d}l = |\mathrm{g}(\bar{V},\ \bar{V})|^{1/2}\,\mathrm{d}\lambda \tag{2.64}$$

"собственной длиной" для пространственно-подобных кривых и "собственным временем" для времени-подобных. Эта величина равна нулю для "нулевых" кривых. *При работе с индефинитной метрикой нужно следить за тем, чтобы не спутать вектор с нулевой длиной с вектором, равным нулю* (*имеющим нулевые компоненты*).

2.31. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Одним из важнейших для физики многообразий является векторное пространство R^4, снабжённое метрикой сигнатуры $+2$ и рассматриваемое как многообразие; это — *пространство Минковского*, пространство-время специальной теории относительности. В элементарных руководствах по специальной теории относительности часто не вводят явно метрический тензор, но в них содержится всё необходимое для того, чтобы его ввести. В частности, мы знаем, что имеется привилегированное семейство систем координат в пространстве-времени, называемых лоренцевыми системами отсчета, и что если два события разделены координатным интервалом $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ в такой системе отсчёта, то величина

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{2.65}$$

не зависит от выбора лоренцевой системы отсчёта. (Здесь c — скорость света.) Изменим масштабы по осям координат, полагая $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. (В теории относительности общепринято нумеровать координаты, начиная с 0, а не с единицы.) Условимся также использовать для пространственно-временных индексов *греческие* буквы. Это поможет нам отличать выкладки, относящиеся только к теории относительности, от более общих. Тогда равенство (2.65) перепишется в виде

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \eta_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta, \tag{2.66}$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ — матрица вида

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1). \tag{2.67}$$

Мы будем считать величину (2.66) *псевдонормой* (§ 1.5) вектора $\Delta\bar{x}$ с компонентами $(\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$. Легко видеть, что эта псевдонорма удовлетворяет аксиомам (Nii) и (Niv) из

§ 1.5 и, значит, ей отвечает *скалярное произведение*. Последнее, очевидно, имеет вид

$$\bar{V}\cdot\bar{W}=\eta_{\alpha\beta}V^{\alpha}W^{\beta}, \tag{2.68}$$

так что фактически $\eta_{\alpha\beta}$ есть метрический тензор, записанный в каноническом виде, а лоренцева система отсчёта есть соответствующий ортонормированный базис.

На примере этой метрики легко проиллюстрировать различие между компонентами вектора и ассоциированной с ним один-формы. В лоренцевой системе отсчета

$$U_0=\eta_{0\alpha}U^{\alpha}=-U^0, \tag{2.69a}$$

$$U_x=U^x,\quad U_y=U^y,\quad U_z=U^z. \tag{2.69b}$$

Рассмотрим *вектор-градиент* функции f — вектор, ассоциированный с один-формой $\tilde{d}f$. Градиент $\tilde{d}f$ имеет компоненты $(\partial f/\partial x^0, \partial f/\partial x^1, \ldots)$, а вектор-градиент $\bar{d}f$ — компоненты $(-\partial f/\partial x^0, \partial f/\partial x^1, \ldots)$. Во многих руководствах по специальной теории относительности градиент вводится как векторный оператор с компонентами $(-\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \ldots)$. Появление неестественного знака «минус» объясняется именно тем, что градиент в действительности является один-формой.

Многообразие M с метрикой g называется *пространством Минковского*, лишь если в нём существует глобальная система координат (покрывающая всё M), в которой компоненты g равны $\eta_{\alpha\beta}$. С этой системой координат особенно удобно работать, но она не является единственно возможной для M. С тем же успехом можно рассматривать и другие системы координат, например связанные с ускоряющимся наблюдателем. Если следовать общим правилам дифференциальной геометрии, то при этом будут получаться физически верные результаты.

2.32. БИБЛИОГРАФИЯ

По поводу более аккуратного и строгого обсуждения того, что понимается под многообразием, и в особенности по поводу важного понятия расслоенного пространства, см. Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette & M. Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds, and Physics (North-Holland, Amsterdam, 1977). *По поводу доказательства теоремы о неподвижной точке, использующего теорию когомологий, см.* M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (Publish or Perish, Boston, 1970), vol. 1, pp. 8—54 (*после прочтения* § 4.24 *ниже!*). *Касательное расслоение и связанные с ним структуры обсуждаются также в книгах:* R. Hermann, Vector Bundles in Mathematical Physics, two volumes (Benjamin, Reading, Mass., 1970); R. Abraham & J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, 2nd ed. (Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978). *Обсуждение расслоенных пространств в контексте современных исследований по квантовой теории поля и гравитации можно найти в статье* B. Carter, Underlying mathematical structure of classical gravitation theory, in: Recent Developments in Gravi-

tation, ed M Levy & S Deser (Plenum, New York, 1979) См также статью A Trautman, Rep Math Phys, 10, 297 (1976)

Функциональные пространства рассматриваются в Choquet-Bruhat et al, а также во многих других руководствах по функциональному анализу, например в книге F Riesz & B Sz-Nagy, Functional Analysis (Ungar, New York, 1955) [имеется перевод Секефальви-Надь Б, Рисс Ф Лекции по функциональному анализу - М Мир, 1979] Теория обобщённых функций (дельта-функция Дирака и пр) разбирается в книгах Choquet Bruhat et al (1977), G Friedlander, The Wave Equation on a Curved Space Time (Cambridge Unicersity Press, 1976)

Результаты из матричной алгебры, используемые при приведении метрического тензора к каноническому виду, можно найти в книгах, указанных в гл 1 Хорошим справочником по векторному анализу в криволинейных координатах в эвклидовом трехмерном пространстве может служить книга W Magnus & F Oberhettinger, Functions of Mathematical Physics, ch 9 (Chelsea, New York, 1949) Метрическая структура многообразия специальной теории относительности (пространства Минковского) описана на элементарном уровне в книге E F Taylor & J A Wheeler, Space time Physics (Freeman, San Francisco, 1963) Изложение этого вопроса, принадлежащее самому Минковскому, см в The Principle of Relativity edited and translated by W Perrett & G B Jeffrey (Dover, New York, 1924) В качестве примера руководства, где градиенты в специальной теории относительности обсуждаются без помощи один-форм, сошлемся на «Фейнмановские лекции по физике» (The Feynman Lectures on Physics, R P Feynman, R B Leighton & M Sands, vol 2, § 25 3 (Addison-Wesley, Reading, Mass, 1950) [имеется перевод Фейнман Р, Лейтон Р, Сэндс М, Фейнмановские лекции по физике, вып 6 — М Мир, 1977]

Углы Эйлера и другие параметризации на группе вращений подробно разобраны в книге H Goldstein, Classical Mechanics (Addison-Wesley, Reading, Mass, 1950) [имеется перевод Голдстейн Г Классическая механика 2-е изд — М Наука, 1975] Для изучающего предмет будет полезным сопоставить изложение Голдстейна с нашим анализом группы вращений в гл 3 ниже

3. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ И ГРУППЫ ЛИ

3.1. ВВЕДЕНИЕ: КАК ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ ОТОБРАЖАЕТ МНОГООБРАЗИЕ В СЕБЯ

В предыдущей главе мы познакомились с системой индексных обозначений. Эта система нужна для решения численных задач, но довольно часто она мешает раскрытию глубоких геометрических идей, составляющих существо дела. В самом начале мы дали определения векторов и тензоров, независимые от выбора базиса, а теперь, сохраняя тот же стиль, опишем один из наиболее полезных инструментов, используемых в геометрии, — производную Ли вдоль конгруэнции, определяемой векторным полем.

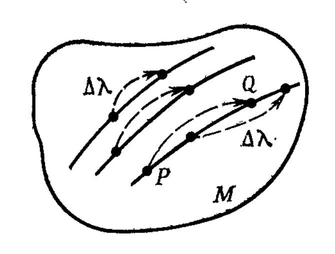


Рис. 3.1. Отображение многообразия M в себя, переводящее каждую точку в точку той же кривой данной конгруэнции, отвечающую значению параметра, которое на некоторое фиксированное число $\Delta\lambda$ больше значения параметра в исходной точке.

Мы уже упоминали о понятии конгруэнции в § 2.12; это — множество попарно непересающихся кривых, заполняющих многообразие или некоторую его часть. Каждая точка из рассматриваемой области многообразия M принадлежит одной и только одной кривой. Поскольку каждая кривая является одномерным множеством точек, множество кривых, образующих конгруэнцию, имеет размерность $n-1$. (При соответствующей параметризации это множество кривых само становится многообразием.) Ключевым фактом, определяющим все последующие результаты, является то, что конгруэнция задаёт некоторое естественное *отображение* многообразия в себя. Если параметр на кривых обозначить через λ, то всякое достаточно малое число $\Delta\lambda$ будет определять отображение, которое каждую точку переводит в точку той же кривой на «расстоянии» $\Delta\lambda$ от неё (см. рис. 3.1). Это отображение взаимно-однозначно, по крайней мере в области, где векторное поле ведёт себя достаточно хорошо (хватает гладкости класса C^1). Если векторное поле — класса C^∞, то мы получаем диффеоморфизм (см. § 2.4). В случае когда такое отображение существует для всех $\Delta\lambda$, мы получаем одномерное

дифференцируемое семейство таких отображений (фактически — однопараметрическую группу Ли с законом композиции $\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2$). Такое отображение мы будем называть *переносом*[1] *вдоль конгруэнции* или *переносом Ли* (*ли-переносом*).

3.2. ДЕЙСТВИЕ ПЕРЕНОСА ЛИ НА ФУНКЦИИ

Пусть f — некоторая функция на многообразии. В результате переноса вдоль конгруэнции на $\Delta\lambda$ функции f очевидным образом ставится в соответствие новая функция $f^*_{\Delta\lambda}$: если точка P некоторой кривой (см. рис. 3.1) переходит в точку Q той же кривой на параметрическом расстоянии $\Delta\lambda$ от P, то значение новой функции $f^*_{\Delta\lambda}$ в точке Q равно значению f в точке P:

◆ $$f(P) = f^*_{\Delta\lambda}(Q).$$

(Здесь звёздочка в обозначении функции $f^*_{\Delta\lambda}$ означает просто «новая».) Если случится так, что для каждой точки Q значение $f^*_{\Delta\lambda}(Q)$ окажется равным $f(Q)$ — старому значению в точке Q, т. е.

$$f = f^*_{\Delta\lambda},$$

то мы говорим, что функция f *инвариантна* относительно переноса Ли на $\Delta\lambda$. Если функция инвариантна для всех $\Delta\lambda$, то говорят, что она является *ли-тянутой*[2]. Ясно, что всякая ли-тянутая функция f должна быть постоянной вдоль любой кривой данной конгруэнции, т. е. $df/d\lambda = 0$.

3.3. ДЕЙСТВИЕ ПЕРЕНОСА ЛИ НА ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Прежде чем говорить о действии описанного выше отображения переноса Ли на векторные поля, напомним, что всякое векторное поле определяется конгруэнцией кривых, для которой оно является касательным полем. На рис. 3.2 показаны две конгруэнции: одна, для поля $d/d\lambda$, порождает отображение данного многообразия; это порождённое ею отображение действует на другую конгруэнцию, определяющую произвольное поле $d/d\mu$. Действие это очень простое: любая кривая μ-конгруэнции отображается в новую кривую, получаемую в результате переноса Ли точек первой кривой; значения параметра μ также переносятся в новые точки. Итак, мы

---

[1] В оригинале dragging (буквально: волочение). Иногда используют также термин «увлечение». — *Прим. ред.*

[2] В оригинале Lie dragged. — *Прим. ред.*

определили новую конгруэнцию с параметром $\mu^*_{\Delta\lambda}$. Эта новая конгруэнция имеет касательное векторное поле $d/d\mu^*_{\Delta\lambda}$, которое и называется образом векторного поля $d/d\mu$ при рассматриваемом переносе Ли.

Вообще говоря, $\mu^*_{\Delta\lambda}$- конгруэнция будет отлична от μ-конгруэнции. Если эти конгруэнции одинаковы, то мы всюду имеем $d/d\mu^*_{\Delta\lambda} = d/d\mu$ и в таком случае говорим, что векторное поле и конгруэнция инвариантны относительно нашего

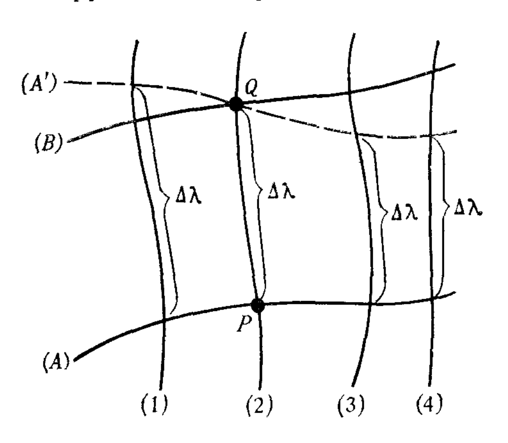


Рис. 3.2. Как новое векторное поле $d/d\mu^*_{\Delta\lambda}$ *получается из старого поля* $d/d\mu$ в результате переноса Ли его путей (интегральных кривых) и его параметра μ. Кривые (1)—(4) — это кривые λ-конгруэнции. Кривая (A) — это μ-кривая, проходящая через точку P; в результате переноса Ли на расстояние $\Delta\lambda$ она отображается в кривую (A'), проходящую через точку Q. Кривая (B) — это μ-кривая исходной конгруэнции, также проходящая через точку Q. Образ кривой (B), получаемый в результате переноса, не показан. Вообще (B) и (A') — различные кривые. Если же они совпадают, то мы говорим, что μ-конгруэнция является ли-тянутой.

отображения переноса Ли на $\Delta\lambda$. Если эти векторное поле и конгруэнция инвариантны при *всех* $\Delta\lambda$, то мы говорим, что они *ли-тянуты* векторным полем $d/d\lambda$.

Ли-тянутое векторное поле имеет простой геометрический смысл, который поясняется на рис. 3.3. Ясно, что (в пределе для бесконечно малого $\Delta\lambda$ и бесконечно малого расстояния между кривыми (2) и (3)) если поле $d/d\mu$ в точке P «ведёт» по кривой (A) точно из точки P в точку R, то $d/d\mu^*_{\Delta\lambda}$ ведёт по кривой (A') точно из точки Q в точку S. В случае когда $d/d\mu$ — ли-тянутое векторное поле, кривая (B) (см. рис. 3.2) совпадает с кривой (A') и $(d/d\mu^*_{\Delta\lambda})_Q = (d/d\mu)_Q$ а следовательно, $d/d\mu$ также ведёт из Q в S. Вспоминая наше обсуждение скобок Ли в § 2.14, заключаем, что $[d/d\lambda, d/d\mu] = 0$: вектор-

ное поле является ли-тянутым, если его скобка Ли с полем, осуществляющим перенос («тянущим» полем), обращается в нуль:

$$[d/d\lambda, \quad d/d\mu] = 0. \tag{3.1}$$

Можно посмотреть на дело и иначе. Предположим, что на рис. 3.3 нам задана не вся конгруэнция, а лишь единственная кривая (A) с параметром μ. Тогда, выполняя перенос Ли этой кривой для всех возможных значений $\Delta\lambda$, можно породить всю конгруэнцию. Одной из таких порожденных кривых будет (A'). Обозначим порождённое таким образом поле через $d/d\mu_L$. В силу построения вектор $d/d\lambda$ всегда касателен к кривой с фиксированным значением μ_L, а вектор $d/d\mu_L$ — к кривой с фиксированным значением λ. Отсюда следует, что эти векторные поля должны коммутировать.

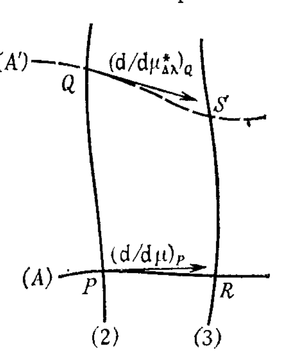


Рис. 3.3. Средняя часть рис. 3.2. Кривая (B) не изображена. К кривым (A) и (A') в точках P и Q соответственно проведены касательные векторы.

3.4. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ

Понятие переноса позволяет дать определение производной вдоль конгруэнции. Любые попытки определить производные векторных и тензорных полей сопряжены с определёнными трудностями. Предположим, мы хотим определить производную векторного поля как предел разности между векторами в различных точках, поделённой на расстояние между ними. Первая проблема — определить «расстояние» между точками. Если заданные точки лежат на одной кривой конгруэнции, то расстояние между ними можно определить как разность значений параметра в этих точках. (В результате мы получим производную по параметру; в случае многообразий без метрики на большее рассчитывать и не приходится.) Вторая и более серьёзная проблема — как сравнивать векторы в различных точках, т. е. как ответить на вопрос, будут векторы в разных точках «параллельны» или нет. В случае эвклидовой плоскости ответ на этот вопрос прост и однозначен. Для искривлённой поверхности ответ уже может не быть однозначным. В случае же произвольного дифференцируемого многообразия вопрос о параллельности векторов в различных точках вообще не имеет смысла, поскольку не существует правил, по которым можно было бы осуществлять параллельное перенесение векторов. Чтобы определить «абсо-

лютную» параллельность, многообразие следует наделить ещё одной структурой, называемой *аффинной связностью.* Это делается в гл. 6, посвящённой римановой геометрии. Здесь мы рассмотрим другую конструкцию, полезную при решении любой задачи, в которой центральную роль играет конгруэнция. Конгруэнция сама даёт возможность ввести понятие параллельности в различных точках. Для сравнения векторов в точках λ и $\lambda+\Delta\lambda$, принадлежащих некоторой кривой, достаточно выполнить перенос Ли вектора в точке $\lambda+\Delta\lambda$ обратно в точку λ. В результате в точке λ получится новый вектор, вычитая который из старого можно найти разность между ними. Заметим, что эта разность определена *однозначно*, следовательно, заданная конгруэнция однозначно определяет производную. Но эта производная зависит от конгруэнции.

Выведем аналитические формулы для вычисления производной. Для начала рассмотрим скалярную функцию. Вычислим значение скаляра в точке $\lambda_0+\Delta\lambda$, перенесем его обратно в точку λ_0, вычтем из него значение скаляра в точке λ_0, разделим эту разность на $\Delta\lambda$ и перейдем к пределу при $\Delta\lambda\to 0$. Более подробно, значение скалярного поля f в точке $\lambda_0+\Delta\lambda$ равно $f(\lambda_0+\Delta\lambda)$. В результате переноса этого значения мы получим новое (ли-тянутое) поле f^*, удовлетворяющее соотношению $\mathrm{d}f^*/\mathrm{d}\lambda=0$. Очевидно, его значение в точке λ_0 то же самое, что и в точке $\lambda_0+\Delta\lambda$: $f^*(\lambda_0)=f(\lambda_0+\Delta\lambda)$. Следовательно, определённая выше производная имеет вид

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{f^*(\lambda_0)-f(\lambda_0)}{\Delta\lambda}=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{f(\lambda_0+\Delta\lambda)-f(\lambda_0)}{\Delta\lambda}=\left(\frac{df}{d\lambda}\right)_{\lambda_0}. \quad (3.2)$$

Полученная формула для *производной Ли* функции f не является, конечно, неожиданной. Для оператора взятия производной Ли имеется специальное обозначение: $\mathcal{L}_{\bar V}$; здесь $\bar V$ — векторное поле, порождающее отображение переноса (в нашем случае поле $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$). Мы доказали, что для функций

$$\blacklozenge \quad \mathcal{L}_{\bar V}f=\bar V(f)=df/d\lambda. \quad (3.3)$$

Теперь проделаем то же для векторного поля $\bar U=\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$. Поскольку вектор определяется своим действием на функции, мы используем в дальнейших рассуждениях *произвольную* функцию f. В точке λ_0 поле $\bar U$ даёт производную $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\mu)_{\lambda_0}$, а в точке $\lambda+\Delta\lambda$ — производную $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\mu)_{\lambda_0+\Delta\lambda}$. Перенося $\bar U(\lambda_0+\Delta\lambda)$, как в конце § 3.3, мы получаем новое, ли-тянутое поле $\bar U^*=\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu^*$, удовлетворяющее соотношениям $[\bar U^*,\bar V]=0$ и $\bar U^*(\lambda_0+\Delta\lambda)=\bar U(\lambda_0+\Delta\lambda)$. Из обращения коммутатора в

нуль следует, что всюду

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu^*}f=\frac{d}{d\mu^*}\frac{d}{d\lambda}f. \qquad (3.4)$$

Поэтому (для аналитических векторных полей)

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\mu^*}f\right)_{\lambda_0}&=\left(\frac{d}{d\mu^*}f\right)_{\lambda_0+\Delta\lambda}-\Delta\lambda\left(\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu^*}f\right)\right)_{\lambda_0}+O(\Delta\lambda^2)\\&=\left(\frac{d}{d\mu}f\right)_{\lambda_0+\Delta\lambda}-\Delta\lambda\left(\frac{d}{d\mu^*}\left(\frac{d}{d\lambda}f\right)\right)_{\lambda_0}+O(\Delta\lambda^2)\\&=\left(\frac{d}{d\mu}f\right)_{\lambda_0}+\Delta\lambda\left(\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu}f\right)\right)_{\lambda_0}\\&\qquad-\Delta\lambda\left(\frac{d}{d\mu}\left(\frac{d}{d\lambda}f\right)\right)_{\lambda}+O(\Delta\lambda^2).\end{aligned}$$

Определим *производную Ли* $\mathcal{L}_{\bar V}\bar U$ как векторное поле, действие которого на f задаётся соотношением

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_{\bar V}\bar U](f)&=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{\bar U^*(\lambda_0)-\bar U(\lambda_0)}{\Delta\lambda}\right](f)\\&=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\left(\frac{d}{d\mu^*}f\right)_{\lambda_0}-\left(\frac{d}{d\mu}f\right)_{\lambda_0}\right]/\Delta\lambda\\&=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left(\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu}f-\frac{d}{d\mu^*}\frac{d}{d\lambda}f\right). \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Ясно, что разность между μ^* и μ — первого порядка по $\Delta\lambda$; отсюда следует, что для получения предела последнего выражения нужно просто заменить μ^* на μ. Поскольку это равенство верно для всех f, мы имеем

◆ $$\mathcal{L}_{\bar V}\bar U=\frac{d}{d\lambda}\bar U-\frac{d}{d\mu}\bar V=[\bar V,\ \bar U]. \qquad (3.6)$$

Этот результат также является совершенно естественным. Действительно согласно определению производной Ли вдоль $\bar V$, векторное поле имеет нулевую производную Ли, если оно ли-тянуто, т. е. если оно коммутирует с $\bar V$. Поэтому можно было с самого начала ожидать, что производная Ли одного векторного поля вдоль другого совпадает с их коммутатором. В силу антисимметрии скобки Ли мы получаем

$$\mathcal{L}_{\bar V}\bar U=-\mathcal{L}_{\bar U}\bar V. \qquad (3.7)$$

Упражнение 3.1. (а) Покажите, что для произвольных дважды дифференцируемых полей $\bar V$ и $\bar U$ выполняется (на функциях и полях) тождество

$$[\mathcal{L}_{\bar V},\ \mathcal{L}_{\bar W}]=\mathcal{L}_{[\bar V,\ \bar W]}. \qquad (3.8)$$

(b) Докажите тождество Якоби для производных Ли на функциях и векторных полях

$$[[\pounds_{\bar{X}}, \pounds_{\bar{Y}}], \pounds_{\bar{Z}}]+[[\pounds_{\bar{Y}}\pounds_{\bar{Z}}], \pounds_{\bar{X}}]+[[\pounds_{\bar{Z}}, \pounds_{\bar{X}}], \pounds_{\bar{Y}}]=0; \quad (3.9)$$

здесь $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ — произвольные трижды дифференцируемые векторные поля.

[Указание: для проверки утверждения (a) на векторах покажите, что (3.8) равносильно (2.14); для проверки утверждения (b) на векторах воспользуйтесь равенством (3.8) и непосредственно вытекающим из определения производной Ли соотношением $\pounds_{\bar{A}} + \pounds_{\bar{B}} = \pounds_{\bar{A}+\bar{B}}$.]

Упражнение 3.2. (a) Докажите формулу Лейбница

$$\pounds_{\bar{V}}(f\bar{U}) = (\pounds_{\bar{V}}f)\bar{U} + f\pounds_{\bar{V}}\bar{U}, \quad (3.10)$$

используя определения производной Ли $\pounds_{\bar{V}}$ на функциях и векторных полях.

(b) Из (2.7) следует, что компоненты $\pounds_{\bar{V}}\bar{U}$ в *координатном базисе* имеют вид

$$(\pounds_{\bar{V}}\bar{U})^i = V^j \frac{d}{dx^j} U^i - U^j \frac{d}{dx^j} V^i. \quad (2.7)$$

Используя утверждение (a), покажите, что для векторных полей, заданных в произвольном базисе $\{\bar{e}_i\}$,

$$(\pounds_{\bar{V}}U)^i = V^j\bar{e}_j(U^i) - U^j\bar{e}_j(V^i) + V^jU^k(\pounds_{\bar{e}_j}\bar{e}_k)^i, \quad (3.11)$$

где $\bar{e}_j(U_i)$ — производная функции U^i вдоль векторного поля $\bar{e}_j$.

Упражнение 3.3. Рассмотрим систему координат, для которой $\bar{V}$ является одним из векторов координатного базиса, скажем $\partial/\partial x^1$. Покажите, что для любого векторного поля $\bar{W}$ выполняется соотношение

$$\blacklozenge \quad (\pounds_{\bar{V}}\bar{W})^i = \partial W^i/\partial x^1, \quad (3.12)$$

т. е. определение производной Ли — это бескоординатная форма определения частной производной.

3.5. ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ ОДИН-ФОРМЫ

Поскольку поля один-форм и тензоров более высокого ранга определяются через векторные поля и скалярные функции, можно из уже данных определений производной Ли для векторов и скаляров получить определение производной Ли для один-форм. Идея определения та же самая. Скажем, что поле один-форм *ли-тянуто*, если его значение на любом ли-

тянутом векторном поле постоянно[1]. Чтобы найти производную Ли, переносим[2] один-форму из точки $\lambda_0 + \Delta\lambda$ обратно в точку λ_0, затем вычитаем один-форму в этой точке и т. д. В результате мы получим, что если $\tilde{\omega}$ — поле один-форм, то $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ — производная Ли от $\tilde{\omega}$ вдоль $\bar{V}$ — есть поле один-форм, определяемое следующим правилом (правилом Лейбница для производных первого порядка):

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}[\tilde{\omega}(\bar{W})] = (\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})(\bar{W}) + \tilde{\omega}(\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W}) \tag{3.13}$$

для произвольного векторного поля $\bar{W}$. Поскольку $\tilde{\omega}(\bar{W})$ — просто функция, производная $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ определена через уже известные нам операции — через производные Ли от функций и векторных полей.

Упражнение 3.4. Пользуясь формулой (3.13) и соотношением (2.7) для компонент поля $\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W} = [\bar{V}, \bar{W}]$, покажите, что $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ имеет в координатном базисе компоненты, равные

$$\blacklozenge \qquad (\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})_i = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}\omega_i + \omega_j \frac{\partial}{\partial x^i} V^j. \tag{3.14}$$

Естественное обобщение формулы (3.13) на тензоры более высокого ранга приводит к следующим свойствам производной Ли:

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}(\mathsf{A}\otimes\mathsf{B}) = (\mathcal{L}_{\bar{V}}\mathsf{A})\otimes\mathsf{B} + \mathsf{A}\otimes(\mathcal{L}_{\bar{V}}\mathsf{B}), \tag{3.15}$$

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}(\mathsf{T}(\tilde{\omega}, \ldots; \bar{U}, \ldots)) = (\mathcal{L}_{\bar{V}}\mathsf{T})(\tilde{\omega}, \ldots; \bar{U}, \ldots)$$
$$+\mathsf{T}(\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}, \ldots; \bar{U}, \ldots) + \ldots + \mathsf{T}(\tilde{\omega}, \ldots; \mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{U}, \ldots) + \ldots, \tag{3.16}$$

где A, B, T — произвольные тензоры, а $\tilde{\omega}, \ldots$ и $\bar{U}, \ldots$ — произвольные один-формы и векторы соответственно.

3.6. ПОДМНОГООБРАЗИЯ

Подмногообразие многообразия M — это такое многообразие, которое является гладким подмножеством в M. Если M — обычное трёхмерное эвклидово пространство, то обычные гладкие поверхности и кривые служат его подмногообразиями. Для четырёхмерного пространства-времени Минковского (§ 2.31) подмногообразиями будут, например, трёхмерное пространство событий, происходящих с точки зрения некоторого фиксированного наблюдателя одновременно с данным событием (т. е. множество точек с одинаковой времен-

[1] Вдоль интегральных кривых «тянущего» поля. — *Прим. ред.*
[2] При помощи ли-тянутого поля один-форм. — *Прим. ред.*

нóй координатой t), а также гиперболоид всех событий, отстоящих на постоянный интервал Δs^2 от заданного события. Иногда вместо слова «подмногообразие» употребляют слово «гиперповерхность», в иных же учебниках под гиперповерхностью понимают только такое многообразие, размерность которого на единицу меньше размерности M.

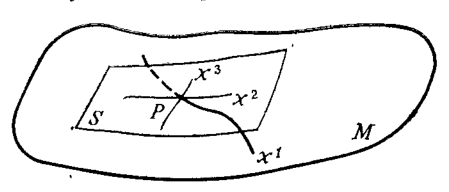


Рис. 3.4. Изображены двумерное подмногообразие S трёхмерного многообразия M и система координат в окрестности точки P, удовлетворяющая определению, данному в тексте. Координатная линия x^1 пересекает S только в точке P.

Хотя понятие подмногообразия довольно наглядно, слово «гладкий», которое мы употребили выше, нуждается в уточнении. В разных руководствах предлагаются разные (и не эквивалентные) определения гладкости. Мы примем такое определение, которое обеспечивает наибольшую гладкость и более всего отвечает нашему определению многообразия. Итак, m-мерное *подмногообразие* S n-мерного многообразия M — это множество точек многообразия M, обладающее следующим свойством: в некоторой открытой окрестности в M произвольной точки P из S существует такая система координат для M, в которой точки S, лежащие в этой окрестности, определяются соотношениями $x^1 = x^2 = \ldots = x^{n-m} = 0$ (см. рис. 3.4). Одномерные подмногообразия — это *кривые*; предъявляемые к ним требования гладкости иллюстрирует рис. 3.5. Из данного выше определения очевидным образом вытекает, что всякое подмногообразие S само является многообразием, ибо покрывается соответствующими координатными окрестностями (картами). В том частном случае, когда $m = n$, всякое открытое подмножество многообразия M будет его подмногообразием.



Рис. 3.5. Кандидат в одномерные подмногообразия двумерного многообразия, который не проходит, так как пересекает сам себя в точке P. В этой точке нельзя построить требуемые координаты. Таким образом, не все, а лишь некоторые кривые являются подмногообразиями.

Наш интерес к подмногообразиям объясняется главным образом тем, что решения дифференциальных уравнений, записываемые обычно в виде $\{y_i = f_i(x^1, \ldots, x^m),\ i = 1, \ldots, p\}$, можно представлять себе как подмногообразия

с координатами $\{x^1, \ldots, x^m\}$ некоторого большего многообразия с координатами $\{y_1, \ldots, y_p, x^1, \ldots, x^m\}$. Однако изучение подмногообразий мы начнём в ином аспекте, и лишь в гл. 4 увяжем его с дифференциальными уравнениями.

Пусть P — точка подмногообразия S (размерности m) многообразия M (размерности n). Всякая кривая в S, проходящая через точку P, будет также кривой в M, проходящей через P; отсюда очевидным образом следует, что касательный вектор к такой кривой в точке P является элементом как пространства T_P, касательного к M в точке P, так и пространства V_P, касательного к S в точке P. В действительности V_P есть векторное подпространство размерности m в T_P. С другой стороны, произвольный вектор, принадлежащий T_P, но не принадлежащий V_P, не имеет однозначной «естественной» проекции на V_P (напомним, что в общем случае понятие ортогональности не вводится).

Для один-форм в точке P ситуация в точности обратная. Пусть T_P^* — сопряжённое к T_P пространство; это совокупность всех один-форм в точке P, каковые суть функции, определённые на всём T_P. Аналогично пусть V_P^* — сопряжённое к V_P, т. е. пространство один-форм в точке P, рассматриваемой уже как точка многообразия S. Произвольная один-форма из T_P^* определяет один-форму из V_P^*, получаемую просто ограничением со всего T_P на его подпространство V_P. Наоборот, данному элементу из V_P^* нельзя однозначно сопоставить элемент из T_P^*, ибо, зная лишь значения один-формы на V_P, вообще говоря, нельзя сказать, каковы будут её значения на векторах, не принадлежащих V_P.

Итак, вектор, определённый на подмногообразии S, будет также вектором на многообразии M, а один-форма на M будет также один-формой на S. Обратные же утверждения неверны. К один-формам и подмногообразиям мы вернёмся в гл. 4, а пока сосредоточим внимание на векторных полях.

3.7. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА НА ЯЗЫКЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

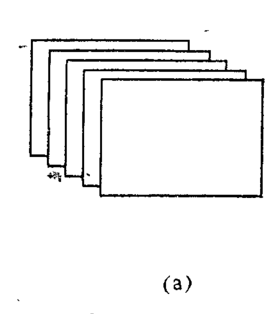
В произвольной карте подмногообразия S имеются координаты $\{y^a, a = 1, \ldots, m\}$ и базис $\{\partial/\partial y^a\}$ векторных полей на S. Эти базисные поля коммутируют:

$$[\partial/\partial y^a, \quad \partial/\partial y^b] = 0. \tag{3.17}$$

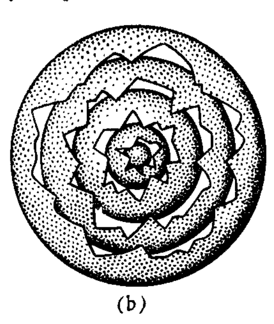
Упражнение 3.5. (а) Покажите, что если $\bar{V}$ и $\bar{W}$ — линейные комбинации (необязательно с постоянными коэффициентами) m попарно коммутирующих векторных полей, то и скобка Ли $\bar{V}$ и $\bar{W}$ будет линейной комбинацией тех же m полей.

(b) Докажите тот же результат для случая, когда попарные скобки Ли m векторных полей не обязательно нулевые, а являются линейными комбинациями этих же m полей.

Из упр. 3.5 (a) следует, что скобка Ли двух *произвольных* векторных полей на *подмногообразии* S касается того же подмногообразия S, ибо эти поля являются линейными комбинациями коммутирующих полей $\{\partial/\partial y^a\}$. Важный факт состоит в том, что верно и обратное утверждение: *если m век-*



(a)



(b)

Рис. 3.6. (a) Слоение многообразия R^3, образованное параллельными плоскостями. Каждая точка R^3 принадлежит одной плоскости данного слоения. Показано только несколько таких плоскостей. (b) Слоение многообразия R^3, образованное концентрическими сферами. Центр этих сфер является особой точкой слоения.

торных полей класса C^∞, *определённых* в некоторой *области U* многообразия M, *имеют попарные скобки Ли, являющиеся линейными комбинациями этих же m векторных полей, то интегральные кривые этих полей образуют некоторое семейство подмногообразий.* Размерность, которую имеет каждое такое подмногообразие, равна размерности векторного пространства, натянутого на эти поля в произвольной точке, т. е. самое большее m, но может быть и меньше (этот случай рассматривается в § 3.9). Каждая точка области U принадлежит одному и только одному такому подмногообразию, при условии что размерность векторного пространства, порождённого полями, одна и та же всюду в U. Такое семейство подмногообразий заполняет U во многих отношениях вполне аналогично тому, как это делает конгруэнция кривых (см. § 2.12), и называется *слоением* области U. Каждое подмногообразие является листом этого слоения. Два примера слоений можно увидеть на рис. 3.6.

Сформулированное утверждение носит название *теоремы Фробениуса.* Доказательство этой теоремы вкратце излагается в следующем параграфе, но основную идею легко понять и так. Если интегральные кривые различных полей опреде-

ляют некоторое подмногообразие, они должны оставаться касательными к нему: ни одна кривая не может начать «выпячиваться», «вылезать» из него. Такое касание может быть гарантировано в том случае, если все указанные скобки Ли сами будут касательными к нему, поскольку каждая такая скобка Ли — это просто производная одного из наших векторных полей вдоль другого. Если ни одно из векторных полей не имеет производной, торчащей из данной гиперповерхности, то ни одна интегральная кривая не покинет этой ги-

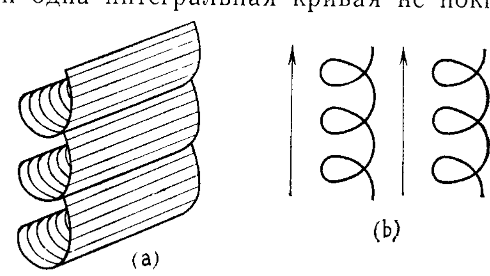


Рис. 3.7. В R^3 векторное поле $dx/d\lambda = -\sin\lambda$, $dy/d\lambda = \cos\lambda$, $dz/d\lambda = 1$ "поднимается" по спирали в вертикальном направлении[1], с радиусом спирали 1. (a) Это спиральное поле и базисное векторное поле, отвечающее координате x, образуют семейство поверхностей, причём каждая точка пространства R^3 принадлежит одной из поверхностей семейства. Одна такая поверхность представлена на рисунке; она выглядит как волнистая (но не закрученная в спираль!) лента. На рисунке мы смотрим на неё чуть сверху (если считать плоскость x, y горизонтальной) и видим некоторые участки одной стороны ленты (горизонтальные линии) и некоторые участки другой её стороны (спиральные линии). (b) Два векторных поля, не образующих подмногообразия: спиральное поле и базисное поле, отвечающее координате z. Ни для какой точки плоскость, определяемая двумя этими полями в этой точке, не будет касаться "соседних" (сверху или снизу) спиральных кривых.

перповерхности. На рис. 3.7 представлено несколько примеров. Когда мы займёмся изучением дифференциальных форм, мы познакомимся с еще одним вариантом теоремы Фробениуса и увидим, что эта фундаментальная теорема даёт условия существования решений систем дифференциальных уравнений в частных производных («условия интегрируемости»).

3.8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА

Пусть в некоторой открытой области U' многообразия M заданы m' векторных полей, которые в каждой точке P этой области порождают некоторое подпространство пространства

---

[1] Надо представить себе, что горизонтальная плоскость (скажем, плоскость x, y) совершает поступательное движение вверх по спирали. — *Прим. ред.*

T_P, имеющее размерность $m \leqslant m'$. (Множество всех таких подпространств называется *m-мерным распределением на M*; эти распределения не следует путать с распределениями типа дельта-функции, рассмотренными нами в § 2.18.) По крайней мере в некоторой окрестности U произвольной точки P из U' можно выбрать m полей, образующих линейно-независимый базис для всего нашего множества полей; эти поля $\{\bar{V}_{(a)}, a = 1, \ldots, m\}$ будут (согласно упр. 3.5 (b)) обладать в U следующим свойством:

$$[\bar{V}_{(a)}, \bar{V}_{(b)}] = \sum_c \alpha_{abc} \bar{V}_{(c)}. \tag{3.18}$$

Поэтому на самом деле нет необходимости рассматривать случай, когда эти поля не являются линейно-независимыми: такое множество всегда сводится локально к линейно-независимому множеству меньшей размерности. Размерность многообразия M пусть будет n.

Когда имеется только одно векторное поле $\bar{V}$ (т. е. $m = 1$), теорема тривиальна. Ясно, что если $\bar{V}(P) \neq 0$, то в U существуют интегральные кривые, и каждая кривая является одномерным многообразием, подмногообразием многообразия M.

Для случая $m \geqslant 2$ доказательство проводится по индукции. Прежде всего установим одно полезное соотношение, которое нам понадобится при проведении индукции. Используя (3.14), легко показать, что для произвольной функции f и произвольного векторного поля $\bar{V}$ выполняется соотношение

$$\pounds_{\bar{V}}(\tilde{d}f) = \tilde{d}(\pounds_{\bar{V}} f). \tag{3.19}$$

Кроме того, из (3.15) вытекает, что для произвольного векторного поля $\bar{W}$

$$\pounds_{\bar{V}}\langle \tilde{d}f, \bar{W}\rangle = \langle \pounds_{\bar{V}}\tilde{d}f, \bar{W}\rangle + \langle \tilde{d}f, \pounds_{\bar{V}}\bar{W}\rangle. \tag{3.20}$$

Объединяя эти соотношения и учитывая тот факт, что $\pounds_{\bar{V}}\bar{W} = [\bar{V}, \bar{W}]$, получаем нужное нам соотношение

$$\langle \tilde{d}f, [\bar{V}, \bar{W}]\rangle = \pounds_{\bar{V}}\langle \tilde{d}f, \bar{W}\rangle - \langle \tilde{d}(\pounds_{\bar{V}} f), \bar{W}\rangle. \tag{3.21}$$

Возвращаясь к основному доказательству, заметим прежде всего, что если все m векторных полей *коммутируют* (имеют попарные нулевые скобки Ли), то в соответствии с конструкцией, описанной нами в § 2.15, они определяют систему координат для точек, принадлежащих их интегральным кривым, т. е. определяют искомое семейство подмногообразий многообразия M. Чтобы доказать существование этих подмногообразий в общем случае (когда скобки Ли линейно выражают-

ся через поля), мы построим m линейно-независимых линейных комбинаций исходных полей, которые уже будут коммутировать. Итак, предположим, что мы имеем m линейно-независимых векторных полей $\bar{V}_{(a)}$, скобки Ли которых линейно выражаются через них же. Рассмотрим одно из них, скажем поле $\bar{V}_{(m)} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda_m$. Параметр $\lambda_{(m)}$ вдоль конгруэнции поля $\bar{V}_{(m)}$ определён в каждой точке и, следовательно, является функцией в области U многообразия M, которую мы рассматриваем. Коль скоро это функция, определён её градиент $\tilde{d}\lambda_{(m)}$. Воспользуемся им следующим образом. Определим $m-1$ векторных полей $\bar{X}_{(a)}$, являющихся линейными комбинациями всех исходных полей $\bar{V}_{(a)}$ и удовлетворяющих соотношениям

$$\langle \tilde{\mathrm{d}}\lambda_{(m)}, \bar{X}_{(a)} \rangle = 0, \quad a = 1, \ldots, m-1. \tag{3.22}$$

Эти соотношения определяют векторные поля $\{\bar{X}_{(k)}\}$ с точностью до их линейных комбинаций. Далее (согласно упр. 3.5 (b)), мы имеем

$$[\bar{X}_{(a)}, \bar{X}_{(b)}] = \sum_{c=1}^{m-1} \beta_{abc} \bar{X}_{(c)} + \gamma_{ab} \bar{V}_{(m)}, \tag{3.23}$$

$$[\bar{V}_{(m)}, \bar{X}_{(a)}] = \sum_{b=1}^{m-1} \mu_{ab} \bar{X}_{(b)} + \nu_a \bar{V}_{(m)}, \tag{3.24}$$

где β_{abc}, γ_{ab}, μ_{ab} и ν_a суть функции в области U. Свернём эти соотношения с $\tilde{d}\lambda_{(m)}$ и используем формулы (3.21), (3.22) и простое тождество[1])

$$\langle \tilde{\mathrm{d}}\lambda_{(m)}, \bar{V}_{(m)} \rangle = \pounds_{\bar{V}_{(m)}} \lambda_{(m)} = \mathrm{d}\lambda_{(m)}/\mathrm{d}\lambda_{(m)} = 1$$
$$\Rightarrow \tilde{\mathrm{d}}\left(\pounds_{\bar{V}_{(m)}} \lambda_{(m)}\right) = 0. \tag{3.25}$$

После свёртки левые части (3.23) и (3.24) дадут нуль, и в конечном итоге мы находим, что $\gamma_{ab} = \nu_a = 0$. Отсюда следует, что скобки Ли полей $\bar{X}_{(a)}$ не содержат поля $\bar{V}_{(m)}$. Именно этого мы и хотели добиться, когда налагали условие (3.22).

Используем теперь предположение индукции, а именно что произвольные $m-1$ векторных полей, скобки Ли которых линейно выражаются через них же, порождают семейство $(m-1)$-мерных подмногообразий. Поскольку $\{\bar{X}_{(a)}, a = 1, \ldots, m-1\}$—как раз такие поля, они порождают семейство $(m-1)$-мерных подмногообразий, заполняющее U. Определим множество векторных полей $\{\bar{Y}_{(a)}, a = 1, \ldots, m-1\}$,

---

1) Ниже и в некоторых других местах книги автор использует знак $\Rightarrow$ просто как замену слов «откуда следует, что». — *Прим. ред.*

образующих координатный базис для одного из этих подмногообразий, скажем S', таким образом, чтобы эти поля коммутировали на S'. Продолжим их до полей $\{\bar{Z}_{(a)}, a = 1, \ldots, m-1\}$ (определённых и вне S') при помощи переноса Ли вдоль $\bar{V}_{(m)}$:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{Z}_{(a)} = \bar{Y}_{(a)} \text{ на } S' \\ [\bar{V}_{(m)}, \bar{Z}_{(a)}] = 0 \quad \text{в } U \text{ вдоль всякой интегральной} \\ \qquad\qquad\qquad \text{кривой поля } \bar{V}_{(m)}, \text{ пересекающей } S' \end{array}\right\} \quad \text{при } a = 1, \ldots, m-1. \tag{3.26}$$

Доказав, что поля $\bar{Z}_{(a)}$ попарно коммутируют всюду, а не только на S', мы получим полный набор коммутирующих полей $\{\bar{V}_{(m)}, \bar{Z}_{(a)}, a = 1, \ldots, m-1\}$, и теорема будет доказана. Но сначала надо установить, что каждое поле $\bar{Z}_{(a)}$ по-прежнему будет линейной комбинацией полей $\bar{V}_{(a)}$. Фактически мы покажем, что оно является линейной комбинацией одних полей $\bar{X}_{(a)}$, без $\bar{V}_{(m)}$. Поскольку каждое поле $\bar{Z}_{(a)}$ определяется однозначным образом, попробуем искать решения системы (3.26) в виде линейной комбинации

$$\bar{Z}_{(a)} = \sum_b \alpha_{ab} \bar{X}_{(b)}.$$

Используя (3.24) при $\nu_a = 0$, получаем

$$\begin{aligned} 0 = [\bar{V}_{(m)}, \bar{Z}_{(a)}] &= \pounds_{\bar{V}(m)} \bar{Z}_{(a)} \\ &= \sum_b (\pounds_{\bar{V}(m)} \alpha_{ab}) \bar{X}_{(b)} + \sum_b \alpha_{ab} [\bar{V}_{(m)}, \bar{X}_{(b)}] \\ &= \sum_b \frac{d\alpha_{ab}}{d\lambda_m} \bar{X}_{(b)} + \sum_{bc} \alpha_{ab} \mu_{bc} \bar{X}_{(c)}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

где все суммы берутся в пределах от 1 до $m-1$. Переобозначая в последней сумме индексы суммирования ($b \to c$, а $c \to b$), приходим к равенству

$$0 = \sum_b \left(d\alpha_{ab}/d\lambda_m + \sum_c \alpha_{ac} \mu_{cb} \right) \bar{X}_b.$$

Поскольку $\bar{X}_{(a)}$ линейно-независимы, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_{ab}}{d\lambda_m} + \sum_c \alpha_{ac} \mu_{cb} = 0. \tag{3.28}$$

Начальные условия (на подмногообразии S') для величин α_{ab}, состоящие в том, что соответствующая линейная комбинация полей $\bar{X}_{(b)}$ даёт поле $\bar{Y}_{(a)}$, определяют единственное ре-

шение этой системы, которое всегда существует. Следовательно, в каждой точке поля $\bar{Z}_{(a)}$ являются линейными комбинациями полей $\bar{X}_{(a)}$.

И наконец заметим, что после переноса Ли наши поля продолжают коммутировать:

$$[\bar{Z}_{(a)}, \bar{Z}_{(b)}] = 0, \ a, b = 1, \ldots, m-1. \tag{3.29}$$

Это можно доказать, используя тождество Якоби (упр. 2.3) для полей $\bar{V}_{(m)}$, $\bar{Z}_{(a)}$ и $\bar{Z}_{(b)}$. Итак, мы имеем m полей $\{\bar{V}_{(m)}, \bar{Z}_{(a)}, a = 1, \ldots, m-1\}$, которые попарно коммутируют и, следовательно, образуют координатный базис для некоторого подмногообразия размерности m. Поскольку исходные поля $\{\bar{V}_{(a)}\}$ являются линейными комбинациями этих m полей, теорема доказана.

3.9. ПРИМЕР: ГЕНЕРАТОРЫ ВРАЩЕНИЙ

Читатели, знакомые с моментом импульса в квантовой механике, могли обнаружить, что обсуждавшиеся выше понятия им хорошо известны. Рассмотрим в сферических координатах (ненормированный) базисный вектор, отвечающий координате φ; часто его обозначают через $\bar{e}_\varphi$:

$$\bar{e}_\varphi = -y\bar{e}_x + x\bar{e}_y,$$

где $\bar{e}_x$ и $\bar{e}_y$ — векторы обычного декартова базиса в $\mathbb{R}^3$. В наших обозначениях это соотношение запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Обозначим левую часть этого равенства — так называемый «оператор момента импульса» в z-направлении — через $\bar{l}_z$:

$$\bar{l}_z = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

(От формулы, принятой в квантовой механике, наша формула отличается отсутствием множителя $\hbar/i$.) Аналогичным образом можно определить $\bar{l}_x$ и $\bar{l}_y$ и вычислить коммутаторы (скобки Ли)

$$\begin{aligned} [\bar{l}_x, \bar{l}_y] &= -\bar{l}_z, \\ [\bar{l}_y, \bar{l}_z] &= -\bar{l}_x, \\ [\bar{l}_z, \bar{l}_x] &= -\bar{l}_y. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Следовательно, эти три вектора определяют некоторое подмногообразие. Поскольку векторов три, может создаться впечатление, что это подмногообразие непременно трёхмерное,

т. е. должно совпадать со всем пространством. В действительности же это подмногообразие двумерно. В самом деле, если положить $r \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, то $\bar{l}_x(r) = \bar{l}_y(r) = \bar{l}_z(r) = 0$. Иначе это можно выразить так:

$$\tilde{d}r(\bar{l}_x) = \tilde{d}r(\bar{l}_y) = \tilde{d}r(\bar{l}_z) = 0. \qquad (3.31)$$

В силу нашего описания градиента $\tilde{d}r$ как множества поверхностей постоянного r и в силу описания его свёртки, скажем с $\bar{l}_x$, как числа поверхностей, которые $\bar{l}_x$ «протыкает», из (3.31) вытекает, что все три оператора $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$ *касательны* в сфере $r = \text{const}$. Следовательно, в любой точке эти операторы линейно-зависимы и порождают подмногообразие размерности два — эту самую сферу, конечно.

Упражнение 3.6. Покажите, что утверждение упр. 3.3 останется справедливым, если заменить $\overline{\overline{W}}$ *произвольным* тензорным полем.

Упражнение 3.7. Определим оператор L^2 формулой

$$L^2 = \pounds_{\bar{l}_x}\pounds_{\bar{l}_x} + \pounds_{\bar{l}_y}\pounds_{\bar{l}_y} + \pounds_{\bar{l}_z}\pounds_{\bar{l}_z}. \qquad (3.32)$$

Докажите, что $\pounds_{\bar{l}_x}$ и L^2 коммутируют. По симметрии L^2 должно также коммутировать с $\pounds_{\bar{l}_x}$ и $\pounds_{\bar{l}_y}$. Покажите, что для любой скалярной функции f

$$L^2 f = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}, \qquad (3.33)$$

где θ и φ — обычные сферические координаты. Таким образом, $L^2 f$ — «угловая часть» оператора $\nabla^2 f$ на единичной сфере.

3.10. ИНВАРИАНТНОСТЬ

С помощью производных Ли можно в удобной форме записать, что́ означает инвариантность тензорного поля относительно тех или иных преобразований, и это один из основных случаев использования производных Ли в физике. А именно, говорят, что тензорное поле $\mathbf{T}$ инвариантно относительно векторного поля $\bar{V}$, если

$$\pounds_{\bar{V}}\mathbf{T} = 0. \qquad (3.34)$$

В случае когда $\mathbf{T}$ имеет физический смысл (скажем, является метрическим тензором, или скалярным полем, описывающим потенциальную энергию некоторой частицы, или векторным силовым полем), все те векторные поля (если они

существуют), относительно которых $\mathbf{T}$ инвариантно, также представляют физический интерес. Например, в предыдущем параграфе рассматривались векторные поля, связанные с вращениями сферы. Известно, что момент импульса полезно рассматривать лишь в том случае, когда задача инвариантна относительно вращений вокруг хотя бы одной оси. Если система инвариантна относительно вращений в некоторой плоскости, то говорят, что эта система *аксиально-симметрична* (или *осесимметрична*), и момент импульса, отвечающий генератору этих вращений, является сохраняющейся величиной. Как это получается, мы обсудим в упр. 5.8; здесь же рассмотрим инвариантность в общем случае.

Центральное место в изучении понятия инвариантности занимает следующая теорема. Предположим, нам дано множество $F=\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots\}$ тензорных полей, свойства инвариантности которых нас интересуют. *Множество всех векторных полей $\bar{V}$, относительно которых все поля из F* инвариантны, *является алгеброй Ли* (определение алгебры Ли было дано в § 2.14). Доказательство этой теоремы мы проведём в два шага. На первом шаге, выполняемом в упр. 3.8, доказывается, что указанное множество полей является векторным пространством над вещественными числами.

Упражнение 3.8. Покажите, что если тензор $\mathbf{T}$ инвариантен относительно каждого из векторных полей $\bar{V}$ и $\bar{W}$, то он будет инвариантен и относительно $a\bar{V}+b\bar{W}$, где a и b — *постоянные*.

Наш второй шаг опирается на результат упр. 3.1 (а), применимый ввиду (3.13) и (3.15) ко всем тензорным полям. Если $\bar{V}$ и $\bar{W}$ — векторные поля из рассматриваемого множества, то для всякого тензорного поля $\mathbf{T}_i$ из F

$$\pounds_{\bar{V}}\mathbf{T}_i=\pounds_{\bar{W}}\mathbf{T}_i=0\Rightarrow[\pounds_{\bar{V}}, \pounds_{\bar{W}}]\,\mathbf{T}_i=0\Rightarrow\pounds_{[\bar{V}, \bar{W}]}\mathbf{T}_i=0. \quad (3.35)$$

Следовательно, если $\bar{V}$ и $\bar{W}$ принадлежат нашему множеству, то и $[\bar{V}, \bar{W}]$ тоже ему принадлежит. Теорема доказана. Вскоре мы увидим, что алгебры Ли очень тесно связаны с группами Ли, и поэтому доказанная теорема отчасти помогает понять, почему группы Ли так полезны в физике. В следующих параграфах мы разберём несколько примеров инвариантности.

Весьма важно уяснить себе, какое именно векторное пространство представляет из себя эта алгебра Ли. Под линейной комбинацией полей V и W обычно понимают векторное поле $a\bar{V}+b\bar{W}$, где a и b — произвольные функции на данном многообразии. У нас же допускаются (см. упр. 3.8) лишь линейные комбинации, в которых a и b — *постоянные вели-*

чины. Для построенного нами векторного пространства *поля* $\bar{V}$ и $\bar{W}$ служат *элементами*; это — не расслоенное пространство, для которого $\bar{V}$ и $\bar{W}$ служат сечениями. Это больше похоже на конечномерные функциональные пространства (см. § 2.3). Возможно, этот момент может показаться несущественным, но он важен для определения размерности рассматриваемого векторного пространства. Например, три векторных поля $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$, о которых речь шла в предыдущем параграфе, линейно-зависимы как векторные поля в R^3, поскольку все они касательны к S^2. Но для представления одного из этих полей через два других приходится использовать линейные комбинации с *переменными* коэффициентами. Поэтому эти три поля суть *линейно-независимые* элементы алгебры Ли, никакая линейная комбинация этих полей с постоянными коэффициентами (не все из которых нули) не равна нулевому элементу алгебры, каковым является нулевое векторное поле. Поэтому мы говорим, что эти векторные поля образуют базис трехмерной алгебры Ли. Из других алгебр Ли мы знали до сих пор лишь одну, а именно алгебру *всех* касательных векторных полей к некоторому многообразию или подмногообразию. Никакое конечное множество таких полей не может быть базисом относительно линейных комбинаций с постоянными коэффициентами, поэтому мы говорим, что эта алгебра Ли бесконечномерна.

3.11. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ КИЛЛИНГА

Многие многообразия, встречающиеся в физике, обладают метриками, и случаи, когда метрика инвариантна относительно некоторого векторного поля, представляют значительный интерес. *Векторным полем Киллинга* (или *вектором Киллинга*) называется такое векторное поле $\bar{V}$, для которого

$$◆ \quad \pounds_{\bar{V}}\mathrm{g} = 0. \tag{3.36}$$

Можно показать, что координатная запись этого уравнения в заданной системе координат имеет следующий вид (ср. с (3.14)):

$$(\pounds_{\bar{V}}\mathrm{g})_{ij} = V^k \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} + g_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} V^k + g_{kj} \frac{\partial}{\partial x^i} V^k = 0. \tag{3.37}$$

Часто удобно использовать такую систему координат, в которой семейство интегральных кривых векторного поля $\bar{V}$ является семейством координатных линий, скажем для координаты x^1. Тогда, в силу упр. 3.6, мы имеем

$$(\pounds_{\bar{V}}\mathrm{g})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^1} g_{ij} = 0, \tag{3.38}$$

т. е. метрические компоненты не зависят от координаты x^1. И обратно, если в некоторой системе координат компоненты метрики не зависят от какой-либо координаты, то базисный вектор, отвечающий этой координате, будет вектором Киллинга. Довольно часто векторы Киллинга находят именно таким способом.

В качестве примера найдем векторные поля Киллинга для трехмерного эвклидова пространства. Его метрика имеет в декартовых координатах компоненты

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \tag{3.39}$$

не зависящие от x, y и z. Поэтому $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ суть векторы Киллинга. Та же метрика в сферических координатах имеет компоненты

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} = 1, \\ g_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} = r^2, \\ g_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi} = r^2\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Следовательно, $\partial/\partial\varphi$, т. е. $\bar{l}_z$, — вектор Киллинга. Ясно, что $\bar{l}_x$ и $\bar{l}_y$ — также векторы Киллинга. Эти шесть векторов Киллинга образуют базис алгебры Ли векторных полей Киллинга. Доказательство этого утверждения будет дано в гл. 5, ч. Е, где мы подробно рассмотрим максимально-симметричные пространства.

3.12. ВЕКТОРЫ КИЛЛИНГА И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ В ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦЫ

Из классической механики известно, что если сила является градиентом аксиально-симметричного потенциала, то момент импульса частицы относительно оси симметрии будет величиной, постоянной вдоль траектории частицы. Подобным же образом если потенциал не зависит от какой-нибудь из декартовых координат, скажем от x, то x-компонента импульса сохраняется. Однако довольно редко отмечается, что если потенциал имеет какую-либо другую симметрию (скажем, постоянен на семействе подобных эллипсоидов), то с ней *не связано никакой сохраняющейся величины.* Таким образом, сохраняемость величин является не просто следствием инвариантности потенциала относительно некоторого движения (кругового, линейного или эллиптического в наших трёх примерах), необходимо также, чтобы это движение осуществлялось вдоль *векторного поля Киллинга* того эвклидова пространства, которое используется для описания динамики. Мы

пока не владеем достаточной математической техникой, чтобы доказать это утверждение (его доказательство нам придётся отложить до упр. 5.8), но в правдоподобности его можно убедиться, рассмотрев уравнение движения. В общепринятых векторных обозначениях оно записывается так:

$$m\dot{\mathbf{V}} = -\nabla\Phi \quad \text{или} \quad m\dot{V}^i = -\nabla^i\Phi. \tag{3.41}$$

Но мы-то знаем, что для корректного определения вектора-градиента необходимо вводить в дело метрику, так что в действительности это уравнение имеет вид

$$m\dot{V}^i = -g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi. \tag{3.42}$$

Ясно, что все инварианты, которые можно построить для этого уравнения, используют не только инвариантность Φ, но и инвариантность $\mathbf{g}$

3.13. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Для того чтобы продемонстрировать, каким естественным образом появляются производные Ли в задачах с симметрией, рассмотрим случай осевой симметрии. Осевая (или аксиальная) симметрия — это инвариантность относительно вращений вокруг некоторой фиксированной оси. (Её не следует путать с цилиндрической симметрией, которая требует не только инвариантности относительно вращений вокруг оси симметрии, но ещё и инвариантности относительно сдвигов вдоль этой оси.) Обозначим через φ угол поворота относительно оси симметрии. Довольно часто возникают задачи, в которых имеется некоторая «фоновая» осевая симметрия. В качестве примера можно указать частицу, двигающуюся в поле осесимметрического потенциала, либо малые возмущения какой-либо осесимметрической системы. В этом случае мы получаем линейное уравнение

$$L(\psi) = 0, \tag{3.43}$$

где ψ — неизвестная величина, а L — оператор, инвариантный относительно преобразования $\varphi \to \varphi + \text{const}$. Решения уравнения (3.43) не обязаны быть осесимметрическими: угол поворота частицы относительно оси в какой-то момент имеет одно значение, а в последующий момент — другое; рассматриваемое малое возмущение может иметь неосесимметричные начальные данные. Тем не менее скалярные решения обладают тем прекрасным свойством, что коэффициенты их разложения в ряд Фурье по φ

$$\psi(\varphi, x^j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x^j)\, e^{im\varphi} \tag{3.44}$$

— функции $\psi_m(x^j)$ (индекс j пробегает все координаты, кроме φ) — удовлетворяют следующему, тесно связанному с исходным дифференциальному уравнению:

$$0 = L_m(\psi_m) = e^{-im\varphi}L(\psi_m e^{im\varphi}). \tag{3.45}$$

Операторы L и L_m, как правило, не тождественны, так как L может содержать производные по φ, а L_m не должен. Для примера рассмотрим оператор

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Ясно, что этот оператор инвариантен относительно преобразования $\varphi \to \varphi + \text{const}$. Применяя этот оператор к функции $f(r, \theta)e^{im\varphi}$, получаем

$$\nabla^2(f(r, \theta)e^{im\varphi}) = e^{im\varphi}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}\right\} f(r, \theta). \tag{3.46}$$

Оператор в фигурных скобках есть оператор ∇^2_m в смысле формулы (3.45). Это разложение Фурье функции f не так уж полезно в задачах о движении частицы, когда положение частицы описывается дельта-функцией от φ, но чрезвычайно удобно в случае непрерывных систем, таких, например, как волны на осесимметричном фоне. Играющие ключевую роль функции $e^{im\varphi}$ можно назвать *скалярными осевыми гармониками.*

Скажем, что решение ψ уравнения (3.43) имеет *осевое собственное значение* m, если

$$◆ \quad \pounds_{\bar{e}_\varphi}\psi = im\psi, \tag{3.47}$$

где $\bar{e}_\varphi \equiv \partial/\partial\varphi$ — поле касательных векторов к окружностям симметрии. Все это очень просто, пока ψ — скалярная функция, но предположим, мы имеем дело с векторным уравнением, скажем с уравнением для векторного потенциала в теории электромагнетизма. И в этом случае опять полезны осевые гармоники, но это должны быть уже *векторные* осевые гармоники, к построению которых мы и перейдём.

Рассмотрим подмногообразие $\varphi = 0$ (в действительности это не просто подмногообразие, а так называемое подмногообразие с краем; краем здесь служит ось симметрии). В каждой его точке выберем какой-нибудь базис $\{\bar{e}_i\}$ векторов, касательных к подмногообразию. Дополним этот базис вектором $\bar{e}_\varphi$, так что $\{\bar{e}_\varphi, \bar{e}_i\}$ будет базисом касательного пространства к многообразию в точках нашего подмногообразия. Теперь построим из него базис для всего многообразия, пе-

реноса его по Ли вдоль векторного поля $\bar{e}_\varphi$, вокруг оси симметрии, как показано на рис. 3.8. Каждое из полученных базисных векторных полей удовлетворяет уравнению

$$\pounds_{\bar{e}_\varphi}\bar{e}_j = 0, \tag{3.48}$$

т. е. все они осесимметрические. Следует заметить, что в обычных декартовых координатах компоненты вектора $\bar{e}_j$ по мере движения вокруг оси изменяются. Осевая симметрия векторного поля совсем не означает, что его декартовы компоненты не зависят от φ, она означает лишь, что не зависят от φ его компоненты в некоторой системе координат, включающей φ.

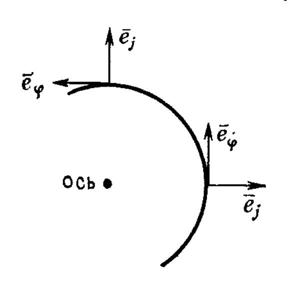


Рис. 3.8. Базис $(\bar{e}_\varphi, \bar{e}_j)$, полученный в результате переноса Ли вдоль поля $\bar{e}_\varphi$ (вид сверху вдоль оси симметрии).

Итак, мы имеем базис векторов с осевым собственным значением 0 (см. (3.48)). Ясно, что базисом с осевым собственным значением m будет

$$\bar{e}_{(m)j} = \bar{e}_j e^{im\varphi},$$
$$\bar{e}_{(m)\varphi} = \bar{e}_\varphi e^{im\varphi}. \tag{3.49}$$

Любое векторное поле, удовлетворяющее соотношению

$$\pounds_{\bar{e}_\varphi}\bar{V} = im\bar{V}.$$

можно представить в виде линейной комбинации векторных осевых гармоник с собственным значением m, задаваемых формулой (3.49), с коэффициентами, не зависящими от φ.

Упражнение 3.9. В эвклидовом трёхмерном пространстве постройте осевые векторные гармоники для вращения вокруг оси z, выбрав в плоскости $\varphi = 0$ базис $\{\bar{e}_x, \bar{e}_z\}$. Найдите декартовы координаты трёх векторных гармоник, отвечающих $m = 2$. Подобным же образом, отправляясь от базиса $\{\tilde{d}x, \tilde{d}z\}$ в плоскости $\varphi = 0$, найдите базис один-форм, являющихся осевыми гармониками с собственным значением $m = 2$. Покажите, что если f — скалярная функция с осевым собственным значением 2, то её градиент $\tilde{d}f$ будет один-формой с осевым собственным значением 2. Докажите, что $\bar{e}_x \pm i\bar{e}_y$ имеет осевые собственные значения ± 1.

Хотя мы этим пока и не пользовались, ясно, что всё это тесно связано с теорией групп. Существование осевой симметрии означает, что «фоновая» физическая ситуация инвариантна относительно переносов Ли вдоль $\partial/\partial\varphi$, а эти переносы образуют группу Ли, как было описано в § 3.1. Эта

группа, $SO(2)$, чрезвычайно проста. Больший интерес представляет группа всех вращений трёхмерного пространства (симметрия относительно этой группы называется сферической симметрией); эта группа уже сложнее, поскольку производные Ли вдоль $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$ попарно не коммутируют. Чтобы исследовать этот случай, необходимо предварительно провести систематическое изучение самих групп Ли, чему и посвящена оставшаяся часть главы.

3.14. АБСТРАКТНЫЕ ГРУППЫ ЛИ

Мы уже несколько раз касались групп Ли и алгебр Ли. Теперь займёмся их систематическим изучением. Использование групп Ли и алгебр Ли в физике объясняется главным образом тем, что, как мы уже видели, с их помощью выражаются свойства инвариантности некоторых физически важных тензоров. Этот вопрос будет рассмотрен в последующих параграфах; в данном параграфе наша цель — исследовать многообразие группы само по себе. Необходимо совершенно чётко представлять себе, что между многообразием группы и каким бы то ни было многообразием, снабжённым тензором, свойства инвариантности которого описываются группой, нет ничего общего. Многообразие всех вращений ($SO(3)$) отлично от многообразия, координатные системы которого вращаются (E^3).

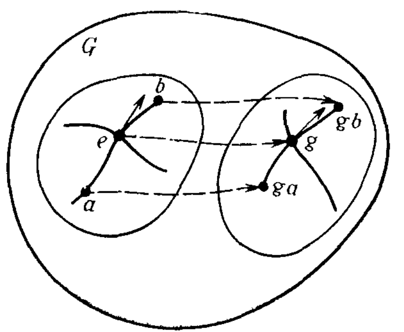


Рис. 3.9. Левый сдвиг на g отображает окрестность точки e на окрестность точки g. Таким образом, имеется естественное отображение векторов в точке e в векторы в точке g.

Пусть нам дана конечномерная группа Ли, т. е. многообразие класса C^∞ размерности n, на котором заданы следующие отображения класса C^∞ (диффеоморфизмы): любому элементу g из G отвечает отображение $h \to gh$ (*левый сдвиг на* (или *посредством*) g), а также отображение $h \mapsto hg$ (*правый сдвиг на* g). Не предполагается, что данная группа является абелевой (коммутативной) (т. е., вообще говоря, $hg \neq gh$). Единичный элемент группы будем обозначать через e. Произвольная окрестность единичного элемента e отображается при левом сдвиге на данный элемент g в некоторую окрестность этого элемента (см. рис. 3.9). Поскольку это отображение переводит кривые в кривые же, касательные векторы в точке e (элементы касательного пространства T_e) отображаются в касательные векторы в точке g. Получаемое

таким образом отображение $L_g: T_e \to T_g$ также представлено на рис. 3.9. (Принцип здесь тот же самый, что и в случае отображения переноса Ли, см. § 3.3.) Говорят, что векторное поле $\bar{V}$ на G *левоинвариантно*, если L_g переводит значение $\bar{V}$ в точке e в значение $\bar{V}$ в точке g (т. е. $L_g: \bar{V}(e) \mapsto \bar{V}(g)$) для *всех* g. В таком случае, в силу свойств группового закона композиции, L_g: $\bar{V}(h) \mapsto \bar{V}(gh)$ для всех h из G, так что данное выше определение — это естественное определение «постоянного» векторного поля на G. Также ясно, что каждый

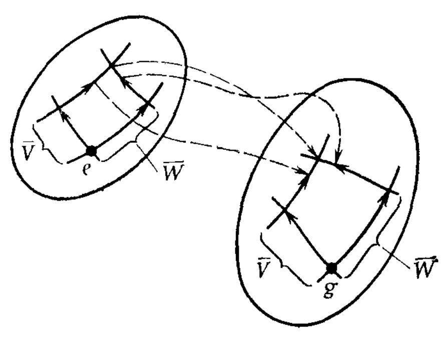


Рис. 3.10. Отображение незамкнутого параллелограмма на рис. 2.21 для левоинвариантных векторных полей. Поскольку поля левоинвариантны, смещения на параметрическое расстояние ε в окрестности точки e отобразятся в такие же сдвиги в окрестности точки g, и потому "зазор" в окрестности e, представляющий скобку Ли рассматриваемых полей, отобразится в зазор в окрестности g, представляющий скобку Ли сдвинутых полей.

вектор из T_e определяет единственное левоинвариантное векторное поле, откуда следует, что левоинвариантные векторные поля образуют n-мерное векторное пространство. (Как и в случае линейных комбинаций, рассмотренных в § 3.10, коэффициентами в линейных комбинациях этих полей являются *константы*, а не функции на G.) Далее, легко видеть (см. рис. 3.10), что если $\bar{V}$ и $\bar{W}$ — два произвольных левоинвариантных векторных поля, то L_g переводит значение поля $[\bar{V}, \bar{W}]$ в точке e в значение того же поля в точке g, так что поле $[\bar{V}, \bar{W}]$ также оказывается левоинвариантным. (Те читатели, для которых приведённая картинка не кажется убедительной, могут, используя координаты на G, сами доказать этот результат.) Этот факт весьма важен, ибо он означает, что *левоинвариантные векторные поля образуют алгебру Ли*. Это так называемая *алгебра Ли группы* G. Она обозначается через $\mathfrak{L}(G)$ (некоторые авторы обозначают её через $\mathfrak{g}$). Эта алгебра Ли полностью характеризуется своими *структурными константами* c^i_{kl}, определяемыми следующим образом. Пусть $\{\bar{V}_{(i)},\ i = 1, \ldots, n\}$ — какой-нибудь базис нашей алгебры Ли,

т. е. линейно-независимое множество левоинвариантных векторных полей. (Если эти поля линейно-независимы в одной точке, скажем e, то в силу левоинвариантности они будут линейно-независимы всюду.) Тогда можно записать

$$[\bar{V}_{(k)}, \bar{V}_{(l)}] = c^j_{kl}\bar{V}_{(j)} \tag{3.50}$$

(суммирование подразумевается). Если все структурные константы обращаются в нуль, то алгебра Ли называется *абелевой* (*коммутативной*). Ниже мы увидим, что тогда и G оказывается абелевой[1]. Естественно, базис $\{\bar{V}_{(k)}\}$ не является единственно возможным; можно показать, что при заменах базиса числа $c^j{}_{kl}$ преобразуются как компоненты тензора типа $\binom{1}{2}$. По каждой группе Ли с её алгеброй Ли однозначно определяется «тензор структурных констант» **C**. Имеет место также ослабленный вариант обратного утверждения, а именно, множество структурных констант «почти» однозначно определяет группу Ли, алгебре Ли которой они соответствуют. Это утверждение мы обсудим ниже в § 3.16.

Рассмотрим интегральную кривую левоинвариантного векторного поля $\bar{V}$, проходящую через e. Она имеет касательный вектор $\bar{V}_e$ в точке e, и существует однозначно определённая параметризация этой кривой (с параметром, скажем, t), для которой точке e соответствует значение параметра $t = 0$. Как было показано в § 2.13, точки на этой кривой могут быть получены экспоненцированием $\bar{V}$, т. е. могут быть представлены в виде $\exp(t\bar{V})$. Здесь речь идёт попросту о диффеоморфизме многообразия G на себя, порождённом векторным полем $\bar{V}$ (см. § 3.1). В отличие от произвольного векторного поля, поле $\bar{V}$ полностью определяется вектором $\bar{V}_e$, поэтому точки многообразия G, лежащие на указанной кривой, можно обозначить так:

$$g_{\bar{V}_e}(t) = \exp(t\bar{V})|_e. \tag{3.51}$$

Поскольку, по определению, для экспоненты выполняется соотношение

$$\exp(t_2\bar{V})\exp(t_1\bar{V})|_e = \exp[(t_1 + t_2)\bar{V}]|_e,$$

точки на нашей интегральной кривой образуют группу

$$g_{\bar{V}_e}(t_1 + t_2) = \exp[(t_1 + t_2)\bar{V}]|_e$$
$$= \exp(t_2\bar{V})\exp(t_1\bar{V})|_e = g_{\bar{V}_e}(t_2)\, g_{\bar{V}_e}(t_1), \tag{3.52}$$

которая называется *однопараметрической подгруппой* груп-

[1] При условии её связности. — *Прим. ред.*

пы G. Эта подгруппа всегда будет абелевой: $g_{\overline{V}_e}(t_1+t_2) = g_{\overline{V}_e}(t_2+t_1)$ — просто потому, что групповая операция соответствует сложению значений параметра. Каждому вектору из T_e соответствует единственная такая подгруппа. Далее, поскольку каждая однопараметрическая подгруппа является кривой в G класса C^∞, проходящей через точку e (подгруппа всегда содержит единичный элемент), то существует взаимно-однозначное соответствие между однопараметрическими подгруппами группы G и элементами её алгебры Ли.

Упражнение 3.10. Дайте определение правоинвариантного векторного поля. Покажите, что такие поля образуют алгебру Ли. Докажите, что их интегральные кривые, проходящие через точку e, совпадают с интегральными кривыми левоинвариантных векторных полей. Покажите, что их интегральные кривые, проходящие через другие точки, вообще говоря, не совпадают с интегральными кривыми левоинвариантных полей, за исключением случая, когда группа является абелевой.

Упражнение 3.11. (a) Покажите, что произвольный базис $\{\overline{V}_i(e),\ i=1, \ldots, n\}$ в T_e определяет линейно-независимое множество левоинвариантных векторных полей, которые мы обозначим через $\{\overline{V}_i\}$.

(b) Рассмотрим касательное расслоение TG группы Ли G. В некоторой окрестности U точки e введём для него следующие координаты. Пусть $\overline{X}$ — вектор в точке g из U. Запишем $\overline{X} = \sum_i \alpha_i \overline{V}_i(g)$. Слоем в точке g служит R^n, поэтому в качестве координат вектора $\overline{X}$ возьмём $\{\alpha_i\}$. Координатами в расслоении TG над U будут тогда $\{\{$координаты точки $g\}, \{\alpha_i\}\}$. Показать, что этот выбор координат можно распространить на всё TG таким образом, чтобы получилось 1-1-отображение TG на $G \times R^n$, т. е. что *касательное расслоение группы Ли тривиально.*

3.15. ПРИМЕРЫ ГРУПП ЛИ

(i) Простейшим примером группы Ли служит R^n, которое представляет собой многообразие и группу относительно сложения векторов. Это абелева группа. Однопараметрическими подгруппами являются прямые, проходящие через начало координат. Левоинвариантные векторные поля параллельны этим прямым; очевидно, все они коммутируют между собой. Отсюда следует, что соответствующая алгебра Ли есть векторное пространство T_e, снабжённое абелевой скобкой Ли: $[\overline{V}, \overline{W}] = 0$ для всех $\overline{V}$ и $\overline{W}$ из T_e.

(ii) Для физики одной из самых важных групп Ли является группа всех вещественных $n \times n$-матриц с отличным

от нуля определителем. Эта группа называется *полной линейной группой n-мерного вещественного пространства*[1] и обозначается через $GL(n, \mathrm{R})$. Она является группой Ли по следующим причинам. Во-первых, это группа относительно операции умножения матриц, единичным элементом которой служит единичная матрица. (Требование, чтобы определитель был не равен нулю, необходимо, ибо оно обеспечивает существование обратного элемента для любой матрицы.) Во-вторых, это многообразие. Для любой матрицы A из $GL(n, \mathrm{R})$ с элементами $\{a^i{}_j,\ i,\ j=1, \ldots, n\}$ можно рассмотреть окрестность радиуса ε, состоящую из матриц B, для которых $|b^i{}_j - a^i{}_j| < \varepsilon$ при всех i и j, и ε можно выбрать настолько малым, чтобы каждая матрица B тоже имела отличный от нуля определитель. В качестве координат в этой окрестности можно взять $x^i{}_j = b^i{}_j - a^i{}_j$, и поскольку их n^2 и все они независимы, то размерность группы $GL(n, \mathrm{R})$ равна n^2. В действительности это — подмногообразие пространства R^{n^2}. Поскольку R^{n^2}, подобно любому R^m, тождественно с касательным пространством в любой из своих точек, то касательным пространством к группе $GL(n, \mathrm{R})$ в единице e будет R^{n^2}, и, следовательно, любой касательный вектор представим в виде матрицы. Например, кривая в $GL(n, \mathrm{R})$, образованная матрицами $\mathrm{diag}(1+\exp(\lambda),\ 1,\ 1, \ldots, 1)$, где λ — параметр, имеет в точке $\lambda=0$ касательную $\mathrm{diag}(1, 0, 0, \ldots, 0)$. Определитель этой матрицы равен *нулю*, что иллюстрирует тот факт, что в T_e входят *все* матрицы и что *любая* матрица порождает однопараметрическую подгруппу, левоинвариантное векторное поле[2] и некоторый элемент алгебры Ли группы Ли $GL(n, \mathrm{R})$.

Однопараметрическая подгруппа, порождённая произвольной матрицей A, является проходящей через точку e интегральной кривой левоинвариантного векторного поля, значение которого в e совпадает с A. Обозначим матрицы из этой подгруппы через $g_A(t)$, так что $\mathrm{d}g_A(t)/\mathrm{d}t|_0 = A$ (это просто означает, что $\mathrm{d}(g_A)^i{}_j/\mathrm{d}t|_0 = a^i{}_j$ для всех i, j). В силу (3.52) имеем

$$g_A(t+\Delta t) = g_A(t)\, g_A(\Delta t)$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}g_A(t)/\mathrm{d}t = g_A(t) A \tag{3.53}$$

$$\Rightarrow g_A(t) = \exp(tA) \tag{3.54}$$

$$= 1 + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 + \frac{1}{3!} t^3 A^3 + \ldots . \tag{3.55}$$

---

[1] В оригинале General Linear group in n Real dimensions. Отсюда обозначение $GL(n, R)$. — Прим. ред.

[2] Следует помнить, что векторы, касательные к G, в действительности являются матрицами и их не надо путать с «векторами-столбцами», которые здесь не играют никакой роли.

Формула (3.55) есть определение экспоненты от матрицы; вместе с (3.54) она даёт конкретную реализацию формулы (3.51). Таким образом, однопараметрические подгруппы группы $GL(n, \mathrm{R})$ являются экспонентами произвольных $n \times n$-матриц. Матрицу A физики часто называют *инфинитезимальным генератором* подгруппы $g_A(t)$. В упр. 3.12 приводятся некоторые свойства экспоненты $\exp(tA)$.

Упражнение 3.12. (a) Покажите, что (3.55) удовлетворяет соотношению (3.53).

(b) Покажите, что из (3.55) вытекает соотношение

$$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp(A)B. \tag{3.56}$$

(c) Известно (см., например, Hirsch & Smale, 1974[1]), что для произвольной вещественной матрицы A можно подобрать такую вещественную матрицу B, что $B^{-1}AB$ будет иметь следующую *каноническую* (или *жорданову*) форму (называемую также блочно-диагональной формой, так как ненулевые элементы образуют квадратные блоки вдоль главной диагонали)

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{3.57}$$

где каждый «блок» P_i является квадратной матрицей, причём возможны следующие три случая[2]:

(i) P_i является 1×1-матрицей

$$(\lambda_i); \tag{3.58a}$$

[1] Или любой достаточно полный учебник по высшей алгебре. — *Прим. ред.*

[2] Возможен ещё один случай:

(iv) P_i является недиагональной $2n_i \times 2n_i$-матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_i & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{P}_i & E & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{P}_i & E \\ 0 & & & 0 & \tilde{P}_i \end{pmatrix},$$

где $\tilde{P}_i$ имеет вид (3.58b), а E — единичная 2×2-матрица. — *Прим. перев.*

(ii) P_j является недиагональной 2×2-матрицей вида

$$\begin{pmatrix} r_j & s_j \\ -s_j & r_j \end{pmatrix}; \tag{3.58b}$$

(iii) P_j является недиагональной $n_j\times n_j$-матрицей ($n_j \geqslant 2$) вида

$$\begin{pmatrix} \mu_j & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_j & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_j & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \mu_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \mu_j \end{pmatrix}. \tag{3.58c}$$

При этом числа λ_j, μ_j и $r_j \pm \mathrm{i}s_j$ суть *собственные значения* матрицы A. Используя этот факт и (3.55), покажите, что $\exp(tB^{-1}AB)$ также будет иметь блочно-диагональный вид с соответствующими блоками:

(i) $(e^{t\lambda_j})$; (3.59a)

$$\text{(ii)}\quad e^{tr_j}\begin{pmatrix} \cos ts_j & \sin ts_j \\ -\sin ts_j & \cos ts_j \end{pmatrix}; \tag{3.59b}$$

$$\text{(iii)}\quad e^{t\mu_j}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \cdots \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.59c}$$

Из (а) следует, что матрица B, приводящая A к канонической форме, приводит к канонической форме и $\exp(tA)$ в случаях (i) и (ii), но в случае (iii) матрица, приводящая $\exp(tA)$ к канонической форме, уже зависит от t.

Заметим, что не каждый элемент группы $GL(n, R)$ принадлежит однопараметрической подгруппе. Это объясняется тем, что такая подгруппа является непрерывной кривой в $GL(n, R)$, вдоль которой определитель изменяется непрерывно. Поскольку определитель в точке e равен 1 и обратиться в нуль на кривой не может, то этим *исключается* су-

ществование непрерывной кривой, соединяющей точку e с матрицей, имеющей отрицательный определитель. (Отметим, что в (3.59) представлены лишь матрицы с положительными определителями.) Такие группы называют *несвязными группами*. Итак, мы видим, что для исследования группы Ли в целом, вообще говоря, недостаточно рассматривать лишь её однопараметрические подгруппы или её алгебру Ли. Те элементы, которые можно соединить с точкой *e непрерывным путём* (не обязательно однопараметрической подгруппой), образуют множество, называемое *связной компонентой единицы* данной группы.

Упражнение 3.13. Покажите, что матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

принадлежит связной компоненте единицы группы $GL(n, \mathrm{R})$, но не принадлежит ни одной из однопараметрических подгрупп. (*Указание*: постройте непрерывный путь, соединяющий эту матрицу с $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

Что представляет собой алгебра Ли группы $GL(n, \mathrm{R})$? Рассмотрим касательный вектор $\bar{A}_e$ в точке e и соответствующую однопараметрическую подгруппу $g_{\bar{A}_e}(t)$; левый сдвиг $fg_{\bar{A}_e}(t)$ этой кривой, осуществляемый посредством произвольной матрицы f из $GL(n, \mathrm{R})$, даёт некоторую кривую из конгруэнции левоинвариантного векторного поля, отвечающего $\bar{A}_e$, как показано на рис. 3.11. Вот каким образом $\bar{A}_e$ порождает левоинвариантное поле; мы обозначим его просто через $\bar{A}$. Если f лежит на проходящей через e кривой $g_{\bar{B}_e}(t)$, которая порождается матрицей $\bar{B}_e$ из T_e, то в силу (2.12) скобка Ли $[\bar{A}, \bar{B}]|_e$ этих двух векторных полей в точке e равна

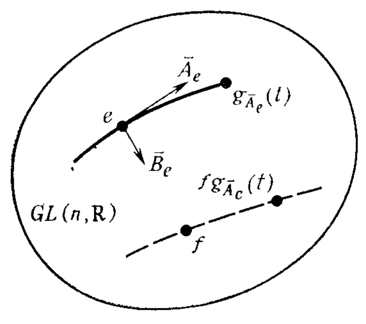


Рис. 3.11. Левый перенос кривой $g_{\bar{A}_e}(t)$ посредством f.

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \left[g_{\bar{A}_e}(t)\, g_{\bar{B}_e}(t) - g_{\bar{B}_e}(t)\, g_{\bar{A}_e}(t) \right],$$

и с помощью формулы (3.55) легко вычислить, что

$$[\bar{A}, \bar{B}]|_e = \bar{A}_e \bar{B}_e - \bar{B}_e \bar{A}_e. \qquad (3.60)$$

Таким образом, скобка Ли двух произвольных левоинвариантных векторных полей на $GL(n, \mathrm{R})$ в точке e является не чем иным, как обычным *матричным коммутатором* двух матриц, порождающих эти поля. Левоинвариантное векторное поле, порождённое этим коммутатором, есть элемент алгебры Ли $\mathfrak{L}(GL(n, \mathrm{R}))$, которая является скобкой Ли исходных полей.

(iii) Мы уже знаем, что группа вращений есть группа Ли (см. § 2.3 (vi)). Подробное исследование этой группы мы проведем позже, а пока рассмотрим её как подгруппу группы $GL(n, \mathrm{R})$. В § 2.29 было показано, что матрицы A, для которых $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, являются элементами группы $O(n)$ — ортогональной группы в n-мерном пространстве[1]. Поскольку определитель обладает свойствами

$$\det A = 1/\det(A^{-1}), \quad \det(A) = \det(A^{\mathrm{T}}) \tag{3.61}$$

(см. § 1.6), у матриц из группы $O(n)$ определитель равен ± 1. Матрицы, определитель которых равен $+1$, образуют подгруппу, которая называется специальной ортогональной группой[2] и обозначается через $SO(n)$. Мы сейчас покажем, что это группа вращений. (Матрицы ортогональной группы $O(n)$, определитель которых равен -1, не образуют подгруппы, так как единичная матрица не входит в их число. Подобно $GL(n, \mathrm{R})$ группа $O(n)$ несвязна.)

Упражнение 3.14. (a) Покажите, что если A принадлежит $O(n)$, то её собственные значения совпадают с собственными значениями обратной матрицы A^{-1}. (Воспользуйтесь тем фактом, что для произвольной матрицы B выполняется соотношение $\det B = \det B^{\mathrm{T}}$.) Читатели, позабывшие, что такое собственные значения, найдут их определение в § 1.6.

(b) Покажите, что собственные значения произвольной невырожденной матрицы A суть обратные величины к собственным значениям матрицы A^{-1}. (Используйте то обстоятельство, что $\det(AB) = \det A \det B$.) Выведите отсюда, что собственные значения $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ произвольной матрицы A из $O(n)$ бывают двух типов: либо (i) $\lambda_j = \pm 1$, либо (ii) $\lambda_j \lambda_k = 1$ для $j \neq k$. Покажите, что в случае (ii) собственные значения встречаются парами $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$, где θ вещественно.

(c) Известно также, что каноническую форму матрицы A из $O(n)$ можно получить посредством преобразования $B^{-1}AB$, где B — матрица из $SO(n)$. Используя этот

[1] В оригинале Orthogonal group in n dimensions. Отсюда обозначение. — *Прим. ред.*

[2] Special Orthogonal group. — *Прим. ред.*

результат, докажите, что произвольная матрица из $O(n)$ имеет каноническую форму, состоящую из блоков

(i) (1); (3.62a)

(ii) (—1); (3.62b)

(iii) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. (3.62c)

(d) Покажите, что алгебра Ли группы $O(n)$ состоит из всех антисимметричных матриц. Используя этот результат, докажите, что $O(n)$ имеет размерность $n(n-1)/2$.

Далее, всякую матрицу A из $GL(n, R)$ можно рассматривать как обратимый тензор типа $\binom{1}{1}$ на R^n, переводящий вектор-столбец $\bar{V}$ из R^n в вектор-столбец $A\bar{V}$ (матричное умножение). Преобразование $B^{-1}AB$ есть просто-напросто преобразование *компонент* этого тензора (см. § 2.26) при замене базиса $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ на базис $\{B^{-1}\bar{e}_1, \ldots, B^{-1}\bar{e}_n\}$. Поэтому можно считать, что произвольная матрица из $SO(n)$ эквивалентна последовательным вращениям в независимых двумерных плоскостях, ибо каноническая форма (3.62c), очевидно, задаёт как раз такое вращение, а форма (3.62b) должна встречаться чётное число раз (чтобы определитель был положителен), так что, сгруппировав попарно соответствующие направления, мы получим формы вида (3.62c) с $\theta = \pi$. Итак, группа $SO(n)$ есть группа вращений. (Заметим, что если n нечётно, то каждая матрица из $SO(n)$ оставляет неподвижным по крайней мере одно направление.) Остальные матрицы из $O(n)$ можно трактовать как *отражения* (с вращением), т. е. преобразования, изменяющие ориентацию всякого множества n линейно-независимых векторов. Это — тема следующего упражнения. (Понятие ориентации базиса подробно обсуждается в гл. 4.)

Упражнение 3.15. Покажите, что каноническая форма всякого элемента из $O(n)$, не принадлежащего $SO(n)$, есть произведение матрицы $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1)$ (имеющей ровно один элемент -1 на диагонали) и канонической формы некоторой матрицы из $SO(n)$. Выведите отсюда, что она является отражением.

Упражнение 3.16. Покажите, что любая матрица из $SO(n)$ является элементом однопараметрической подгруппы. Докажите, что произвольная матрица из $SO(3)$ эквивалентна одному повороту на некоторый угол θ относительно некоторой оси.

Прежде чем расстаться с группой вращений, исследуем её алгебру Ли, по крайней мере для группы $SO(3)$. Векторное пространство T_e есть пространство всех антисимметричных матриц, имеющее размерность три (см. упр. 3.14 (d)). Один из его базисов состоит из матриц

$$L_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad L_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad L_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

Упражнение 3.17. Покажите, что указанный выше базис алгебры Ли группы $SO(3)$ имеет следующие скобки Ли:

$$[L_1, L_2]=L_3,\quad [L_2, L_3]=L_1,\quad [L_3, L_1]=L_2. \tag{3.64}$$

Вскоре мы ещё вернемся к этой алгебре.

(iv) Ещё одна важная для физики матричная группа — это $SU(n)$, *специальная унитарная группа* в (комплексном) n-мерном пространстве[1]. Это подгруппа в группе $GL(n, C)$ всех комплексных $n\times n$-матриц с ненулевым определителем (так называемой *полной линейной группе* n-мерного комплексного пространства[2]). Поскольку каждый элемент матрицы может быть комплексным, а каждое комплексное число задаётся двумя вещественными, группа $GL(n, C)$ имеет размерность (вещественную) $2n^2$. В ней имеется подгруппа $U(n)$, называемая *унитарной группой*, состоящая из унитарных матриц, т. е. матриц U, удовлетворяющих равенству $U^{-1}=U^*$, где символ * обозначает переход к комплексно-сопряженной транспонированной (эрмитово-сопряжённой) матрице. По аналогии со случаем $O(n)$ алгебра Ли подгруппы $U(n)$ состоит из всех антиэрмитовых $n\times n$-матриц. (Матрица A называется *антиэрмитовой*, если $A^*=-A$.) Эта алгебра Ли имеет вещественную размерность n^2, поскольку антиэрмитова матрица имеет $n(n-1)/2$ произвольных комплексных внедиагональных элементов (задаваемых $n(n-1)$ вещественными числами) и n произвольных чисто мнимых диагональных элементов (которые дают ещё n вещественных измерений, а в итоге полная размерность получается n^2). Подгруппа $SU(n)$ в $U(n)$ — это множество всех матриц $U(n)$ с *единичным определителем*. Поскольку определитель любого элемента $U(n)$ есть комплексное число, по модулю равное единице, равенство единице определителя даёт одно дополнительное условие, поэтому $SU(n)$ имеет размерность n^2-1. Алгебра Ли группы

[1] Special Unitary group in n dimensions. — *Прим. ред.*

[2] General Linear group in n Complex dimensions. — *Прим. ред.*

$SU(n)$ — это множество всех антиэрмитовых матриц с нулевым следом. (След матрицы A есть сумма $a^i{}_i$; см. § 1.6.)

Упражнение 3.18. Покажите, что алгебра Ли группы $SU(n)$ есть множество всех антиэрмитовых матриц с нулевым следом. (Можно воспользоваться тем фактом, что произвольный элемент из $U(n)$ имеет каноническую форму $\mathrm{diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_n})$, где $\{\varphi_j, j = 1, \ldots, n\}$ — вещественные числа.)

Упражнение 3.19. (a) Покажите, что следующие матрицы образуют базис касательного пространства T_e группы $SU(2)$:

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{3.65}$$

Докажите, что T_e — трёхмерное *вещественное* векторное пространство: хотя сами матрицы и содержат мнимые числа, лишь их линейные комбинации с *вещественными* коэффициентами остаются в T_e.

(b) Покажите, что указанный выше базис алгебры Ли группы $SU(2)$ имеет следующие скобки Ли:

$$[J_1, J_2] = J_3, \quad [J_2, J_3] = J_1, \quad [J_3, J_1] = J_2. \tag{3.66}$$

Формально это идентично (3.66); как мы увидим в следующем параграфе, это указывает на тесную связь между $SU(2)$ и $SO(3)$.

Упражнение 3.20. (a) Пусть $\mathrm{tr}(A) = a^i{}_i$ обозначает след матрицы A. Докажите, что $\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A)$.

(b) Используя (a), а также: (i) тот факт, что определитель обладает свойством $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, (ii) соотношение (3.56) и (iii) канонические формы (3.55)—(3.59), докажите, что для произвольной матрицы A выполняется соотношение

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A)). \tag{3.67}$$

(c) Используя (3.67), дайте более простое доказательство утверждения упр. 3.18.

3.16. АЛГЕБРЫ ЛИ И ОТВЕЧАЮЩИЕ ИМ ГРУППЫ ЛИ

Для каждой группы Ли G определена её алгебра Ли ($\mathfrak{g}$). Поскольку каждый элемент g из G есть образ точки e при левом сдвиге, порождённом g, и поскольку каждому вектору из T_e соответствует единственное векторное поле из этой алгебры Ли, то, следовательно, каждая точка g из G принадле-

жит некоторой кривой из каждой левоинвариантной конгруэнции. Можно ли построить группу G, зная лишь её алгебру Ли? Ответ в общем утвердительный, но прежде чем сформулировать его, надо дать более совершенное определение алгебры Ли, нежели то, с которым мы до сих пор работали.

Алгебра Ли — это вещественное векторное пространство V, снабжённое операцией билинейного умножения, обозначаемой через [,] (и называемой *скобкой Ли*), которая двум произвольным векторам $\bar{A}$ и $\bar{B}$ сопоставляет вектор $[\bar{A}, \bar{B}]$, причём должны быть выполнены следующие соотношения:

$$\text{(i)} \quad [\bar{A}, \bar{B}] = -[\bar{B}, \bar{A}], \tag{3.68}$$

$$\text{(ii)} \quad [\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] + [\bar{B}, [\bar{C}, \bar{A}]] + [\bar{C}, [\bar{A}, \bar{B}]] = 0. \tag{3.69}$$

Существенное различие между этим определением и определением, которое мы дали в § 2.14, состоит в том, что здесь скобка Ли определена *формально*, а именно как операция, обладающая свойствами (i) и (ii), что позволяет работать с операциями *любой* природы, лишь бы они обладали этими свойствами. Одной из таких операций является взятие коммутатора векторных полей, и это была единственная операция, которую мы до сих пор использовали. Другим очевидным примером служит векторное пространство R^3 с обычным векторным произведением

$$[\bar{a}, \bar{b}] \equiv \bar{a} \times \bar{b}. \tag{3.70}$$

Упражнение 3.21. (a) Покажите, что (3.70) удовлетворяет *тождеству Якоби* (3.69).

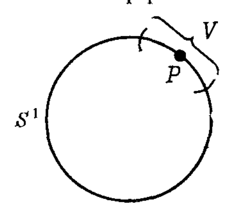
(b) Покажите, что базис $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ имеет следующие скобки:

$$[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \bar{e}_3, \quad [\bar{e}_2, \bar{e}_3] = \bar{e}_1, \quad [\bar{e}_3, \bar{e}_1] = e_2. \tag{3.71}$$

Сравните (3.71) с (3.64) и (3.66).

А теперь сформулируем без доказательства теорему, имеющую фундаментальное значение для физики: за каждой алгеброй Ли стоит группа Ли. Точнее, каждая алгебра Ли есть алгебра Ли одной и только одной связной и *односвязной* группы Ли. (Многообразие называется односвязным, если каждая замкнутая кривая может быть гладко стянута в точку. Обсуждение и доказательство этой теоремы для некоторых частных случаев можно найти в книгах Spivak (1970) и Warner (1971).) Более того, любая другая связная группа Ли с той же алгеброй Ли, но не односвязная *накрывается* этой односвязной группой Ли. (Связное многообразие M *накрывает* многообразие N, если существует отображение π многообразия M на N, такое что прообраз некоторой ок-

рестности V произвольной точки P многообразия N есть дизъюнктное объединение открытых окрестностей точек из $\pi^{-1}(P)$ в M. Пример накрывающего многообразия приведён на рис. 3.12.) Это накрытие должно быть гомоморфизмом групп. (Определение гомоморфизма в § 1.4.)



R^1
-4π -2π 0 2π 4π 6π

Рис 3.12. Единичная окружность S^1 бесконечное число раз накрывается вещественной прямой R^1 при отображении π: $R^1 \to S^1$, переводящем точку x в точку $\pi(x)$ на S^1, координатами которой в плоскости R^2 служат $(\cos x, \sin x)$. Множество $\pi^{-1}(V)$ является объединением всех указанных на рисунке открытых интервалов в R^1.

Прекрасной иллюстрацией этой теоремы служат группы $SO(3)$ и $SU(2)$. Прежде всего покажем, что группа $SU(2)$ односвязна. Для этого рассмотрим множество H всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \tag{3.72}$$

где a и b — произвольные комплексные числа (черта обозначает комплексное сопряжение).

Упражнение 3.22. (a) Покажите, что $H \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, подмножество множества H, состоящее из матриц с ненулевым определителем, является группой по умножению и, следовательно, подгруппой Ли в $GL(2, C)$.

(b) Покажите, что H — вещественное векторное пространство (относительно матричного сложения) размерности 4, один из базисов которого образуют матрицы J_1, J_2, J_3' из упр. 3.19 и матрица $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Пусть A — произвольная матрица, принадлежащая H:

$$A = 2\alpha_1 J_1 + 2\alpha_2 J_2 + 2\alpha_3 J_3 + \alpha_4 I,$$

где $\{\alpha_i\}$ — вещественные числа. Покажите, что A принадлежит $SU(2)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1. \tag{3.73}$$

(d) Используя этот факт, покажите, что группа $SU(2)$ допускает 1-1-отображение на трёхмерную сферу S^3, которая является односвязным многообразием. (Другими словами, S^3 и $SU(2)$ диффеоморфны.)

Теперь построим отображение π: $SU(2) \to SO(3)$, являющееся накрытием. Его легко построить, используя экспоненту от элементов алгебры Ли. В $SU(2)$ экспонента элемента J_1 равна

$$\exp(tJ_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3 \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} \cos(t/2) & \mathrm{i}\sin(t/2) \\ \mathrm{i}\sin(t/2) & \cos(t/2) \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Экспонента элемента L_1 из $SO(3)$ равна

$$\exp(sL_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2!}s^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}s^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Поэтому естественно задать отображение π правилом

$$\pi\colon SU(2) \to SO(3),$$
$$\pi\colon \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & \mathrm{i}\sin\frac{t}{2} \\ \mathrm{i}\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Ясно, что это гомоморфизм двух однопараметрических подгрупп, а также что два элемента t и $t + 2\pi$ из $SU(2)$ имеют *один и тот же* образ в $SO(3)$. Далее, значению параметра $t + 4n\pi$, где n — произвольное целое число, отвечает та же точка из $SU(2)$, что и значению t. Тем самым мы доказали, что $\exp(tJ_1)$ — *двулистное накрытие* $\exp(sL_1)$. Это утверждение распространяется на всю группу: отображение

$$t\colon \exp(t_1J_1 + t_2J_2 + t_3J_3) \mapsto \exp(t_1L_1 + t_2L_2 + t_3L_3) \quad (3.77)$$

есть двулистное накрытие группы $SO(3)$ группой $SU(2)$.

Поскольку мы знаем, что у $SU(2)$ та же глобальная топология, что у трёхмерной сферы, построенное двулистное накрытие даёт возможность разобраться в топологии группы $SO(3)$. Однопараметрическая подгруппа $\exp(tJ_1)$ в $SU(2)$ начинается в точке e при $t=0$ и возвращается в неё при $t=4\pi$. На рис. 3.13 эта подгруппа представлена в виде большой окружности сферы S^3. (Следует, однако, помнить, что мы не вводим метрику на группе $SU(2)$. Нас интересует лишь топология в целом, а не метрические отношения.) Точки, обозначенные t и $t+2\pi$, диаметрально противоположны друг другу. Они дают одну и ту же точку из $SO(3)$, поэтому мы просто можем считать, что $SO(3)$ — это *верхняя полусфера* сферы S^3, причём точки экватора, находящиеся на противоположных концах диаметра (т. е. точки $t=\pi$ и $t=3\pi$), *отождествлются* между собой. Эта верхняя полусфера сферы S^3 с указанным отождествлением уже не является односвязной. Такую кривую, как $\mathscr{C}$, можно гладко стянуть в точку, а вот кривую, задаваемую подгруппой $\exp(tL_1)$, — нельзя, поскольку диаметрально противоположные точки на экваторе нельзя свести вместе — они всегда будут оставаться диаметрально противоположными. Эта конструкция делает очевидным и тот факт, что в некоторой окрестности точки e группы $SO(3)$ и $SU(2)$ тождественны. Именно поэтому у них и совпадают алгебры Ли. Такая идентичность в окрестности единицы имеет место для любых двух групп с одинаковыми алгебрами Ли.

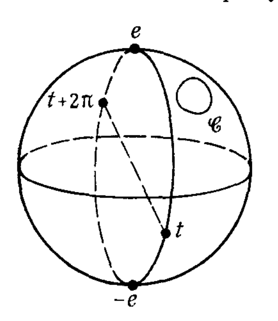


Рис. 3.13. Двумерный „срез" пространства S^3, содержащий однопараметрическую подгруппу $\exp(tJ_1)$ группы $SU(2)$. Группа $SO(3)$ есть верхняя полусфера, причём точки на противоположных концах диаметров отождествляются.

Какой же из этих двух групп соответствует алгебра Ли, определяемая соотношением (3.70)? Это всецело вопрос интерпретации. Как абстрактная алгебра Ли она соответствует обеим группам. Как конкретную алгебру векторов в R^3 её обычно связывают с группой $SO(3)$, а именно говорят, что подгруппе $\exp(\theta L_1)$ (поворот на угол θ относительно оси x) соответствует «кривая» $\exp(\theta\bar{e}_1)$ в R^3 (вектор вдоль оси x длины θ). Это сопоставление повороту вектора общепринято у физиков, особенно когда вращение происходит во времени — тогда скорости вращения сопоставляется вектор угловой скорости. Возможность такого удобного отождествления — чисто случайная вещь, связанная с трёхмерностью нашего

пространства; группа $SO(4)$ имеет размерность 6, а размерность векторного пространства R^4, на котором эта группа действует, равна 4, и здесь подобное отождествление уже невозможно. Но вернёмся к алгебре Ли R^3 (с операцией векторного произведения). Её можно отождествить и с алгеброй Ли группы $SU(2)$, способом, аналогичным описанному выше. В § 3.18 мы увидим, что это даёт возможность сопоставить спину частицы некоторый вектор в R^3, хотя спин и не является элементом из T_p для какой-либо точки P в R^3.

Заканчивая наш разговор об алгебрах Ли, отметим, что мы теперь в состоянии доказать, что абелева алгебра Ли — это алгебра Ли абелевой группы Ли. Абелева алгебра Ли размерности n — это просто векторное пространство и как таковое является алгеброй Ли группы Ли R^n (см. § 3.15). Поскольку группа R^n односвязна, любая другая группа Ли с той же алгеброй Ли должна накрываться группой R^n и должна быть тождественна с ней в окрестности начала координат e. Поскольку R^n — абелева группа ($\bar{V}+\bar{W}=\bar{W}+\bar{V}$), абелевой будет и любая другая (связная) группа, имеющая абелеву алгебру Ли.

3.17. РЕАЛИЗАЦИИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Обычно всякую группу лучше всего рассматривать как *абстрактную группу*, всецело определяемую групповой операцией, а в случае групп Ли ещё и структурой многообразия. Таким образом, $SO(3)$ как абстрактная группа — это просто определённое трёхмерное многообразие, на котором действует определённое правило, по которому паре элементов g и h ставится в соответствие точка gh, их произведение; это правило должно подчиняться обычным аксиомам группы. Для физиков эта абстрактная структура — не самый интересный аспект теории групп. Для них важнее знать, где *действует* группа и как. Группа $SO(3)$ играет такую большую роль потому, что с каждой её точкой ассоциировано вращение нашего трёхмерного пространства. Такое соответствие называется реализацией группы. Точнее, *реализация* данной группы G — это соотнесение каждому элементу g из G преобразования $T(g)$ некоторого пространства M, при котором сохраняются групповые свойства: (i) $T(e)=I$ (тождественное преобразование, оставляющее все точки M на месте); (ii) $T(g^{-1})=[T(g)]^{-1}$; (iii) $T(g)\circ T(h)=T(gh)$. Если это соответствие взаимно-однозначно, ($T(g)\neq T(h)$ при $g\neq h$), то мы имеем *точную* реализацию. В случае когда M — векторное пространство, а каждое $T(g)$ — линейное преобразование (т. е. тензор типа $\binom{1}{1}$ на этом векторном пространстве),

реализация называется *представлением.* Поясним эти понятия на примерах.

(i) Рассмотрим вращения единичной сферы S^2, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=1$ в R^3. Предположим, выполнен поворот относительно оси x на угол θ. В результате этого поворота точка на сфере, имеющая координаты (x, y, z), отобразится в точку (x', y', z') с координатами

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos\theta - z\sin\theta, \\ z' &= y\sin\theta + z\cos\theta, \end{aligned} \tag{3.78}$$

по-прежнему принадлежащую нашей сфере, поскольку $(x')^2+(y')^2+(z')^2=1$. Это преобразование отвечает элементу $\exp(\theta L_1)$ группы $SO(3)$, в обозначениях (3.63). Любому элементу этой группы соответствует некоторое преобразование сферы S^2 в себя. Поскольку S^2 — многообразие, но не векторное пространство, мы имеем реализацию группы $SO(3)$. Но то же самое преобразование (3.78) можно рассматривать и как отображение всего пространства R^3 в себя, а не только сферы S^2 в себя. Поскольку R^3 — векторное пространство, мы получаем представление группы $SO(3)$ посредством матриц, преобразующих векторы пространства R^3 в векторы того же пространства. С помощью этих самых матриц мы и определили группу $SO(3)$ в самом начале. Этот пример служит демонстрацией весьма тонкого, но полезного подхода. Как правило, группа определяется сначала при помощи той или иной (точной) реализации либо представления, так как это даёт возможность конкретно изучить все свойства группы. Затем, однако, целесообразно рассматривать её как абстрактную группу, ибо могут быть и другие полезные представления или реализации, которые до сего были неизвестны. В следующем параграфе мы укажем также представления и реализации для группы вращения.

(ii) У каждой группы есть по меньшей мере две точные реализации: левый и правый сдвиги по себе. Произвольный элемент g группы G определяет её преобразование, при котором точка h отображается в точку gh (*прогрессивная*, или *главная*, реализация), а также преобразование, при котором h отображается в hg^{-1} (*регрессивная* реализация).

(iii)[1] Все изучавшиеся выше матричные группы: $GL(nR)$, $O(n)$, $SO(n)$, $GL(n, C)$, $U(n)$, $SU(n)$ — мы изучали при помощи их точных представлений в виде матричных преобразований n-мерных вещественных либо комплексных векторных пространств. Но каждая группа Ли G допускает ещё пред-

[1] Этот пример даётся в качестве дополнительного материала

ставление в виде линейных преобразований на своей собственной алгебре Ли; оно называется *присоединённым представлением* и определяется следующим образом. Рассмотрим сначала отображение группы G в себя $I_g : h \mapsto ghg^{-1}$. Это — *присоединенная реализация* группы G; преобразование, отвечающее элементу g, состоит в левом сдвиге на g и правом сдвиге на g^{-1}. (Эта реализация не обязательно точная: если G — абелева группа, то I_g — тождественное отображение $h \mapsto h$ для всех g.) Такие преобразования называются *внутренними автоморфизмами* группы G. Заметим, что каждое I_g

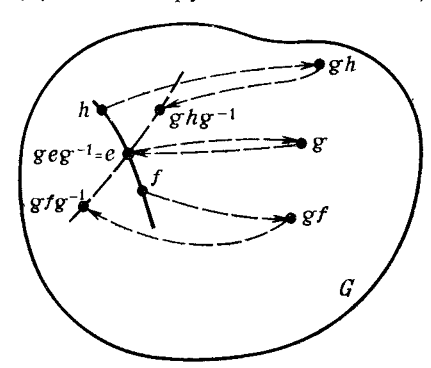


Рис. 3.14. Что́ происходит с кривой, проходящей через точку e, при отображении $h \mapsto ghg^{-1}$, показано в два этапа. Сначала действует отображение $h \mapsto gh$, затем $gh \mapsto ghg^{-1}$. Единичная точка e отображается в себя, но близкие к ней точки h и f обычно изменяются, так что касательный вектор в точке e отображается в некоторый другой вектор.

отображает единичный элемент e в себя, так что каждая кривая, проходящая через e, отображается в кривую, также проходящую через e (вообще говоря, другую), см. рис. 3.14. Поэтому I_g индуцирует отображение произвольного касательного вектора из T_e в касательный же вектор. Это отображение, обозначаемое через Ad_g, называется *присоединённым преобразованием* пространства T_e, индуцированным элементом g. Если кривая, изображённая на рис. 3.14 сплошной линией, есть, скажем, однопараметрическая подгруппа $\exp(t\bar{X})$, где $\bar{X}$ принадлежит T_e, то её образ при действии внутреннего автоморфизма I_g будет тоже однопараметрической подгруппой, поскольку $g(fh)g^{-1} = (gfg^{-1})(ghg^{-1})$. Следовательно, штриховая кривая на рис. 3.14 есть однопараметрическая подгруппа, порождённая вектором $\mathrm{Ad}_g(\bar{X})$:

$$I_g[\exp(t\bar{X})] = \exp[t\,\mathrm{Ad}_g(\bar{X})]. \tag{3.79}$$

Если элемент g сам принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе $g(s) = \exp(s\bar{Y})$, то вектор $\mathrm{Ad}_g(\bar{X})$ должен

некоторым естественным образом выражаться через $\bar{Y}$. Такое выражение для $\mathrm{Ad}_g(\bar{X})$ дано в следующем упражнении.

Упражнение 3.23. Покажите, что

$$\mathrm{Ad}_{g(s)}(\bar{X}) = \exp\left(s\mathcal{L}_{\bar{Y}}\right)\bar{X}. \qquad (3.80)$$

3.18. СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ, СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

Выше мы рассматривали векторы Киллинга и их связь с симметриями эвклидова пространства. Конкретизируем теперь эти понятия на примере сферической симметрии. Говорят, что многообразие M с метрическим тензором g обладает *сферической симметрией*, если алгебра Ли её векторных полей Киллинга содержит в качестве подалгебры (т. е. подпространства, скобки элементов которого снова принадлежат ему же) алгебру Ли группы $SO(3)$. О подалгебре приходится говорить, так как тензор g может иметь и другие симметрии; нас же интересуют здесь только те, которые связаны с его сферической природой. Обратим внимание читателя, что было бы неверно говорить, что M сферично «относительно некоторой точки», так как «центры» соответствующих сфер могут и не принадлежать M (см. рис. 3.15). Наше определение является внутренним: указанная выше подалгебра Ли определяется через векторные поля на самом многообразии M. В § 3.9 было показано, что алгебра Ли векторных полей $\{\bar{l}_x, \bar{l}_y, \bar{l}_z\}$ задаётся соотношениями (3.30). Полагая $\bar{V}_1 = -\bar{l}_x$, $\bar{V}_2 = -\bar{l}_y$ и $\bar{V}_3 = -\bar{l}_z$, мы видим, что алгебра Ли векторных полей $\{\bar{V}_z\}$ тождественна алгебре Ли группы $SO(3)$, задаваемой соотношениями (3.64). Отсюда следует, что данное нами определение сферической симметрии влечёт существование слоения многообразия M, слои которого имеют геометрию сферы (определение слоений см. в § 3.7).

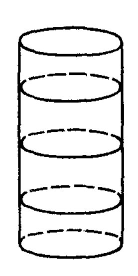


Рис. 3.15. Цилиндрическая поверхность имеет осевую симметрию, но центры окружностей симметрии не принадлежат этой поверхности.

Рассмотрим теперь функции, определённые на двумерной сфере S^2. Всякая функция на M задаёт такую функцию на каждой из её сфер — слоёв симметрии. Определим пространство функций $L^2(S^2)$ как гильбертово пространство всех комплекснозначных квадратично-интегрируемых функций на S^2, т. е. функций, для которых существует

$$\|f\| = \left[\int_{S^2} |f|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right]^{1/2} \qquad (3.81)$$

(норма f), где интеграл берётся по обычному элементу площади сферы. (Наше определение этого пространства не совсем аккуратно, но достаточно для тех целей, которые стоят перед ними.) Пространство $L^2(S^2)$ есть бесконечномерное векторное пространство. Его элементами являются функции, линейные комбинации которых берутся с произвольными постоянными коэффициентами; никакое конечное множество функций не образует базиса. Реализация элемента g группы $SO(3)$ как отображения $R(g)$ сферы S^2 порождает отображение, переводящее произвольную функцию $f(x^i)$ на сфере в другую функцию на сфере, получаемую простым сдвигом аргумента. Тем самым $R(g)$ определяет представление группы $SO(3)$ в векторном пространстве $L^2(S^2)$, и это представление будет уже бесконечномерным, поскольку $L^2(S^2)$ бесконечномерно. Возникает вопрос, существуют ли конечномерные подпространства пространства $L^2(S^2)$, также дающие представления группа $SO(3)$? Каждое такое подпространство должно быть *инвариантным* относительно группы $SO(3)$ в том смысле, что функция $R(g)[f]$ для любого элемента g из $SO(3)$ и любой функции f, принадлежащей этому подпространству, снова должна принадлежать ему. Предположим, такое подпространство существует и функции $\{f_i, i = 1, \ldots, N\}$ образуют его базис. Это подпространство инвариантно тогда и только тогда, когда для произвольных чисел $\{a^i\}$ существуют числа $\{b^i\}$, такие что

$$R(g)[a^j f_j] = b^i f_i. \tag{3.82}$$

Поскольку рассматриваемое отображение линейно, имеет место соотношение

$$b^i = g^i{}_j a^j, \tag{3.83}$$

которое определяет матрицу $g^i{}_j$, соответствующую элементу g группы $SO(3)$. Эта матрица и будет представлением элемента g в данном подпространстве. Будем говорить, что представление группы $SO(3)$ в векторном пространстве V (а также и само V) *неприводимо*, если V не содержит ни одного конечномерного подпространства, инвариантного относительно $SO(3)$.

Конструкция неприводимых представлений группы $SO(3)$ в подпространствах $L^2(S^2)$ описана во многих работах (см. Гельфанд, Минлос и Шапиро, 1963). Базисные функции неприводимых подпространств хорошо известны всем физикам как *сферические гармоники* Y_{lm}. Мы не будем заниматься построением этих гармоник, а просто попытаемся истолковать их в наших терминах. Утверждается следующее. Каждое неприводимое подпространство пространства $L^2(S^2)$ характеризуется некоторым целым числом $l \geqslant 0$ и имеет раз-

мерность, равную $2l+1$. Функции $\{Y_{lm},\ m=-l,\ \ldots,\ l\}$ суть базисные функции для этого подпространства, которое мы обозначим через V_l. Далее, объединение всех этих базисов для всех l служит базисом для самого пространства $L^2(S^2)$; другими словами, сферические гармоники образуют *полную систему функций.* Поскольку любое отображение $R(g)$ сферы S^2 в себя является экспонентой от некоторой линейной комбинации векторов $\{\bar{l}_x, \bar{l}_y, \bar{l}_z\}$, подпространство V_l инвариантно относительно группы $SO(3)$ тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$. В тривиальном случае $l=0$ базисная функция $Y_{00}=1$ имеет производные Ли

$$\bar{l}_x(Y_{00}) = \bar{l}_y(Y_{00}) = \bar{l}_z(Y_{00}) = 0,$$

которые, разумеется, все линейно-зависимы с Y_{00}. Более содержателен случай $l=1$, где мы имеем три базисные функции

$$Y_{1\,-1} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta e^{-i\varphi}, \quad Y_{10} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta,$$

$$Y_{11} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta e^{i\varphi}. \qquad (3.84)$$

Упражнение 3.24. (а) Покажите, что если x, y, z — декартовы координаты в R^3, то на сфере S^2, определяемой уравнением $x^2+y^2+z^2=1$, выполняются следующие соотношения:

$$Y_{1\,-1} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}(x-iy), \quad Y_{10} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} z,$$

$$Y_{11} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}(x+iy). \qquad (3.85)$$

(b) Вычислите все производные $\bar{l}_j Y_{1k}$, в частности проверьте, что

$$\bar{l}_x(Y_{1\,-1}) = -iY_{10}/2^{1/2}, \quad \bar{l}_z(Y_{11}) = iY_{11}, \qquad (3.86)$$

и убедитесь, что пространство Y_1 инвариантно относительно $SO(3)$.

Почему для V_1 берётся именно этот базис? В основном ради удобства. Удобно, когда базис состоит из собственных функций относящихся к делу операторов, т. е. функций, удовлетворяющих соотношению

$$Af = \alpha f, \qquad (3.87)$$

где A — рассматриваемый оператор, а α — константа. Сферические гармоники пользуются предпочтением потому, что они являются собственными функциями одновременно для оператора $\bar{l}_z$ и оператора $L^2 = (\pounds_{\bar{l}_x})^2 + (\pounds_{\bar{l}_y})^2 + (\pounds_{\bar{l}_z})^2$, опреде-

лённого в упр. 3.7. Следующее упражнение показывает, что это большее, на что можно рассчитывать: нельзя найти нетривиальные собственные функции сразу для двух из операторов $\{\bar{l}_x, \bar{l}_y, \bar{l}_z\}$.

Упражнение 3.25. Предположим, что функция f удовлетворяет условиям

$$\bar{l}_x(f) = \alpha f, \quad \bar{l}_y(f) = \beta f,$$

где α и β — некоторые константы. Используя (3.30), покажите, что

$$\alpha = \beta = \bar{l}_z(f) = 0.$$

Между прочим, полнота системы сферических гармоник проистекает из того факта, что $i\bar{l}_z$ и L^2 — коммутирующие операторы (см. упр. 3.7), которые являются самосопряжёнными операторами в $L^2(S^2)$ (точнее, могут быть «расширены» до таких операторов). Спектральная теорема из функционального анализа (см. Рисс и Сёкефальви-Надь, 1979) гарантирует полноту системы их собственных функций.

В действительности представления группы $SO(3)$ можно изучать гораздо более абстрактно, чем мы это делали выше. В частности, для того чтобы развить большую часть относящейся сюда алгебры, нет нужды знать, что́ представляет собой векторное пространство V. Например, наше исходное представление группы $SO(3)$ в виде матриц, преобразующих векторы пространства R^3, безусловно неприводимо, поскольку ни одно подпространство в R^3, за исключением тривиального подпространства $\{0\}$, не является инвариантным относительно вращений. Оказывается, это представление формально *идентично* представлению в пространстве, порождённом сферическими гармониками с $l = 1$, размерность которого также равна трём ($= 2l + 1$). Фактически соотношения (3.85) — это просто преобразование координат в R^3, от (x, y, z) к $(Y_{1\,-1}, Y_{10}, Y_{11})$. В это преобразование входят комплексные числа, но если подходить к делу формально алгебраически, то матрицы $g^i{}_j$ (см. (3.83)), отвечающие базису из сферических гармоник, можно преобразовать в матрицы, отвечающие обычному декартову базису, и окажется, что это будут именно те матрицы, с помощью которых мы в самом начале определили группу $SO(3)$.

Упражнение 3.26. Пусть $\{y^{j'}, \ j = 1, 2, 3\}$ обозначают функции $(Y_{1\,-1}, Y_{10}, Y_{11})$, а $\{x^j\}$ — функции $\{x, y, z\}$. Найдите матрицу перехода $\Lambda^{i'}{}_k = \partial y^{i'}/\partial x^k$ и её обратную $\Lambda^k{}_{i'}$. Используя метод упр. 3.24 (b), найдите матрицу $X^{j'}{}_{k'}$ оператора $\bar{l}_x$ в базисе сферических гармоник:

$$\bar{l}_x(y^{j'}) = X^{j'}{}_{k'} y^{k'}.$$

Вычислите, во что перейдет матрица $X^{i'}{}_{k'}$ при переходе к декартовому базису:

$$X^i_k = \Lambda^i{}_{l'} \Lambda^{r'}{}_k X^{l'}{}_{r'},$$

и убедитесь, что получится в точности матрица $-L_1$ (см. (3.63)).

Отметим, что представление, отвечающее $l = 1$, есть наименьшее точное представление группы $SO(3)$ (представление, отвечающее $l = 0$, очевидно, не является точным). Его обычно называют *фундаментальным представлением* группы $SO(3)$. В § 4.29, посвящённое векторным сферическим гармоникам, мы познакомимся ещё с одним множеством неприводимых представлений группы $SO(3)$. Там пространство представления будет уже не пространством функций на сфере, а пространством векторных полей на сфере.

И наконец, следует сказать несколько слов относительно связи между представлениями группы $SO(3)$ и накрывающей её группы $SU(2)$. (Те читатели, которые не проштудировали § 3.16, смело могут пропустить это место.) Поскольку существует единственный элемент группы $SO(3)$, ассоциированный с данным элементом группы $SU(2)$, то всякое представление R группы $SO(3)$ автоматически определяет представление S группы $SU(2)$: для произвольного элемента u из $SU(2)$ в качестве преобразования $S(u)$ берём $R(\pi(u))$. Если элементам u и u' отвечает один и тот же элемент группы $SO(3)$, то для так построенного представления $S(u) = S(u')$. Но у $SU(2)$ имеются и другие представления, скажем T, для которых $T(u) \neq T(u')$, даже если $\pi(u) = \pi(u')$. Эти представления иногда называют *двузначными представлениями* группы $SO(3)$. Снова мы просто приведём здесь результат: неприводимые представления группы $SU(2)$ определяются индексом $k \geqslant 0$, который может быть либо целым, либо полуцелым числом. Те представления, для которых k — целое число, являются представлениями группы $SO(3)$, отвечающие тому же индексу (т. е. $l = k$). Прочие представления суть двузначные представления группы $SO(3)$. Примером такого двузначного представления может служить матричное представление в двумерном комплексном пространстве, которое мы использовали для определения группы $SU(2)$. Для этого представления $k = \frac{1}{2}$, и называется оно *спинорным представлением со спином* $\frac{1}{2}$. Подобно представлению с $l = 1$ для группы $SO(3)$, данное представление является наименьшим точным представлением для группы $SU(2)$. Если взять произвольный базисный вектор в пространстве этого представления (называемый *спинором*) и подействовать на него однопараметрической подгруппой $\exp(tJ_1)$, где t пробегает

значения от 0 до 4π, то, как нетрудно видеть, соответствующий путь в $SO(3)$, а именно $\exp(tL_1)$ *дважды* пройдет от 0 до 2π: когда мы дойдем до значения $t=2\pi$, мы вернёмся опять в начальную точку в группе $SO(3)$, но в группе $SU(2)$ мы окажемся в точке $-e$. Поэтому говорят, что при повороте на угол 2π спинор меняет знак ($e\to -e$).

Поистине удивительно, что описанное выше соответствие между представлениями — не просто математическая забава Волновая функция элементарной частицы со спином $\frac{1}{2}$ есть элемент пространства неприводимого представления группы $SU(2)$ для соответствующего полуцелого k. Вот пример того, что физик назвал бы изумительной простотой природы. Мы начинаем с алгебры Ли группы вращений и находим, что простейшей из групп, имеющих ту же алгебру Ли, т е. наиболее просто устроенной топологически, будет $SU(2)$, а не $SO(3)$. А затем мы находим, что, несмотря на трудности наглядного представления действия группы $SU(2)$ в R^3, природа посчитала именно её более фундаментальной, создав частицы, соответствующие тем из её представлений, которые не являются представлениями группы $SO(3)$!

3.19. БИБЛИОГРАФИЯ

Несколько старомодное, но весьма полное изложение теории производных Ли дает книга K Yano, The Theory of Lie Derivatives and its Applications (North Holland, Amsterdam, 1955)

Теоремы о полноте для самосопряженных операторов можно найти в «Лекциях по функциональному анализу» Ф Рисса и Б Сёкефальви-Надя (M Мир, 1979)

Анализ тесной взаимосвязи, существующей между группами Ли и производными Ли, дан в книгах F W Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups (Scott, Foresman, Glenview, Ill, 1971), M Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (Publish or Perish, Boston, 1970), vol 1, L Auslander & R E Mac Kenzie, Introduction to Differentiable Manifolds (McGraw Hill, New York, 1963)

Более подробную информацию о группах Ли можно найти в монографиях R Hermann, Lie Groups for Physicists (Benjamin, Reading, Mass, 1966) или H Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover, New York, 1950) Теория представления для наиболее важных групп излагается в большинстве руководств по квантовой механике, например в указанной выше книге Г Вейля, см также H Lipkin, Lie Groups for Pedestrians (North-Holland, Amsterdam, 1966), M A Наймарк, Линейные представления группы Лоренца (M Физматгиз, 1958), И M Гельфанд, P. A Минлос и З Я Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения (M Физматгиз, 1958)

Полезным справочным пособием по матричной алгебре, на которое мы неоднократно ссылались, является книга M W Hirsch, & S Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra (Academic Press, New York, 1974).

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Исчисление дифференциальных форм, созданное в начале этого века Э. Картаном, — один из наиболее полезных и плодотворных аналитических методов в дифференциальной геометрии. Перечень понятий, унифицированных и упрощённых благодаря введению этих форм, поразителен: теория интегрирования на многообразиях, векторное произведение, дивергенция и ротор в трехмерной теории поля, определители матриц, ориентируемость многообразий, условия интегрируемости для систем дифференциальных уравнений в частных производных, формула Стокса, формула Гаусса [1] и ещё многое другое. Как и в случае большинства действительно фундаментальных математических и физических понятий, математика дифференциальных форм очень проста. В этой главе мы сначала введём дифференциальные формы в том геометрическом контексте, в котором они возникают наиболее естественным образом, а затем на глазах читателя теория дифференциальных форм (или просто форм) будет постепенно набирать свою силу.

А. АЛГЕБРА И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФОРМ

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЁМА: ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РОЛЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

До сих пор мы избегали «придавать» нашим многообразиям какую-либо форму или жёсткость. Мы отметили, правда, возможность введения метрических тензоров, но всё наше внимание было сосредоточено на аналитических структурах, которые можно было определять, не прибегая к метрике. Теперь мы обратимся к изучению одного чрезвычайно полезного класса тензоров, а именно тензоров, с помощью которых можно определять элементы объёма на многообразиях.

Рассмотрим объём в двумерном случае, называемый в этом случае площадью. Любая пара (бесконечно малых) векторов

---

[1] В отечественной литературе называемая также формулой Гаусса — Остроградского. — *Прим. ред.*

в эвклидовом пространстве определяет некоторую (бесконечно малую) площадь, а именно площадь, ограниченную параллелограммом, построенным на этих векторах (рис. 4.1). Одна и та же площадь задаётся многими различными парами векторов, которые могут отличаться друг от друга как длиной

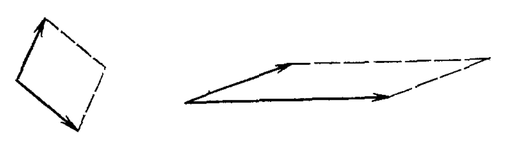


Рис. 4.1. Две пары векторов и определяемые ими площади.

векторов, так и величиной угла между ними (рис. 4.2). Отсюда видно, что площадь — понятие менее жёсткое, чем метрика, ибо эвклидова метрика однозначно определяет и длины векторов, и величину угла, заключённого между ними, а площадь даёт всего лишь одно число, отвечающее двум заданным векторам. Естественно, если метрика есть, то она однозначно определяет и площадь; позже мы покажем, как

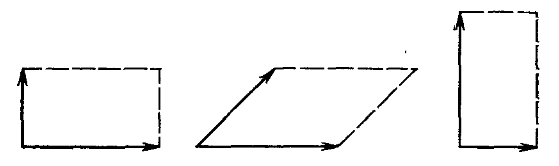


Рис. 4.2. Три пары векторов, определяющие равные площади.

это происходит. Но для определения площади на двумерном многообразии (либо объёма на произвольном многообразии) вовсе не обязательно определять метрику на этом многообразии. В самом деле, многие различные метрики могут определять один и тот же объём.

Предположим, в некоторой точке двумерного многообразия мы имеем два линейно-независимых бесконечно малых вектора. Рассмотрим построенный на них параллелограмм. Мы хотим приписать этой фигуре (малую) площадь, т. е. двум заданным векторам сопоставить некоторое число. Это число должно удваиваться, если будет удвоена длина одного из векторов; кроме того, оно должно обладать свойством аддитивности относительно сложения векторов, т. е. должно выполняться соотношение

$$\text{площадь } (\bar{a},\ \bar{b}) + \text{площадь } (\bar{a},\ \bar{c}) = \text{площадь } (\bar{a},\ \bar{b}+\bar{c}).$$

То что это соотношение выполняется для эвклидова пространства, доказано геометрически на рис. 4.3. На предпо-

следнем шаге используется тот факт, что площадь параллелограмма останется неизменной, если одну из его сторон сместить на любое расстояние вдоль прямой, которую она определяет. Таким образом, мы доказали, что площадь (,)

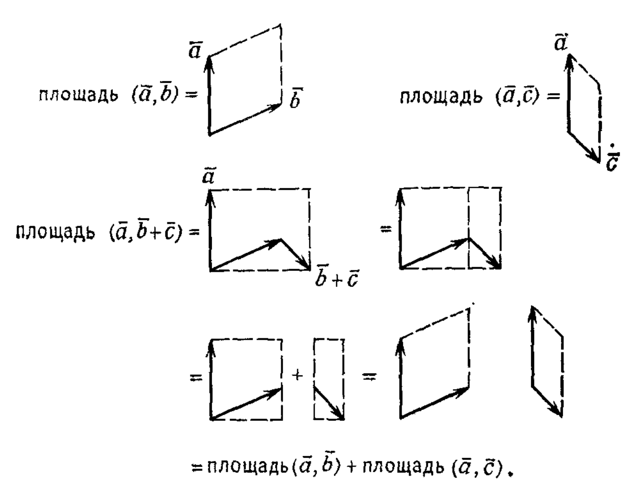


Рис. 4.3. Геометрическое доказательство того факта, что площадь параллелограмма является значением тензора.

билинейна по своим аргументам, т. е. является *тензором.* Поскольку площадь — число, это тензор типа $\binom{0}{2}$. Далее, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны, площадь построенного на них параллелограмма обращается в нуль. Отсюда вытекает, что если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ поменять местами, то наш тензор должен изменить знак; этот факт доказывается в следующем упражнении.

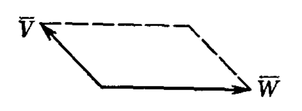


Рис. 4.4. Площадь, определяемая векторами $\bar{V}$ и $\bar{W}$.

Упражнение 4.1. Докажите, что если B — тензор типа $\binom{0}{2}$, такой что $\mathsf{B}(\bar{V}, \bar{V}) = 0$ для всех $\bar{V}$, то $\mathsf{B}(\bar{U}, \bar{W}) = -\mathsf{B}(\bar{W}, \bar{U})$ для всех $\bar{U}$, $\bar{W}$. (Указание: положите $\bar{V} = \bar{U} + \bar{W}$.) Тензор B с таким свойством называется *антисимметричным* (или *кососимметричным*) по своим аргументам.

Остановимся на этом поподробнее. На рис. 4.4 изображены два вектора, задающие параллелограмм определённой площади. Эта площадь, выраженная через координаты векторов, как известно, равна (с точностью до знака) следующему

определителю:

$$\text{площадь} = \begin{vmatrix} V^x & V^y \\ W^x & W^y \end{vmatrix}.$$

Антисимметричность относительно V и W очевидна.

Обычно в приложениях знак игнорируют и под площадью понимают абсолютное значение указанного выше определителя. Но нам будет удобнее сохранить знак, так как он даёт информацию о том, какую ориентацию, правую или левую, имеет заданная пара векторов. Позже мы будем подробно говорить об этом. Кроме того, мы детально исследуем связь между тензорами объёма и определителями матриц. Но прежде нам надо построить алгебру антисимметричных тензоров. Сначала мы рассмотрим свойства таких тензоров в произвольной фиксированной точке, а затем обобщим полученные результаты на тензорные поля.

4.2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРОВ

Напомним ещё раз (см. упр. 4.1) что тензор типа $\binom{0}{2}$ называется антисимметричным, если при перестановке аргументов его знак изменяется, т. е.

$$\tilde{\omega} \text{ антисимметричен} \Longleftrightarrow \tilde{\omega}(\bar{U}, \bar{V}) = -\tilde{\omega}(\bar{V}, \bar{U}) \text{ для всех } \bar{U}, \bar{V}. \quad (4.1)$$

Тензор типа $\binom{0}{p}$, $p \geqslant 3$, называется *антисимметричным*, если при перестановке любых двух своих аргументов он меняет знак. Из всякого тензора можно построить антисимметричный — его так называемую *антисимметричную часть*. Например, если $\tilde{\omega}$ — тензор типа $\binom{0}{2}$, а $\tilde{p}$ — тензор типа $\binom{0}{3}$, то их антисимметричные части задаются формулами

$$\blacklozenge \quad \tilde{\omega}_A(\bar{U}, \bar{V}) = \frac{1}{2!}[\tilde{\omega}(\bar{U}, \bar{V}) - \tilde{\omega}(\bar{V}, \bar{U})], \quad (4.2)$$

$$\blacklozenge \quad \tilde{p}_A(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) = \frac{1}{3!}[\tilde{p}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) + \tilde{p}(\bar{V}, \bar{W}, \bar{U}) + \tilde{p}(\bar{W}, \bar{U}, \bar{V}) - \tilde{p}(\bar{V}, \bar{U}, \bar{W}) - \tilde{p}(\bar{W}, \bar{V}, \bar{U}) - \tilde{p}(\bar{U}, \bar{W}, \bar{V})]. \quad (4.3)$$

Общее правило состоит в том, что должны учитываться все перестановки аргументов, причём нечётные перестановки берутся со знаком минус, а чётные — со знаком плюс. Множители $1/2!$ и $1/3!$ суть традиционные нормировочные множи-

тели, позволяющие называть $\tilde{\omega}_A$ антисимметричной частью тензора $\tilde{\omega}$ В индексных обозначениях формулы (4.2) и (4.3) перепишутся в виде

◆ $$(\tilde{\omega}_A)_{ij} = \frac{1}{2!}(\omega_{ij} - \omega_{ji}) \equiv \omega_{[ij]}, \qquad (4.4)$$

◆ $$(\tilde{p}_A)_{ijk} = \frac{1}{3!}(p_{ijk} + p_{jki} + p_{kij} - p_{jik} - p_{kji} - p_{ikj}) \equiv p_{[ijk]}. \qquad (4.5)$$

Квадратные скобки $[i \ldots k]$ используются для краткой записи процедуры антисимметризации, включая нормировочный множитель В дальнейшем мы постоянно будем использовать это обозначение. Буква с волной над ней, например $\tilde{p}$, всегда обозначает антисимметричный тензор. Один-формы, для которых мы уже давно используем обозначение с волной, — «вырожденный» частный случай антисимметричных тензоров, — у них всего один аргумент.

Упражнение 4.2. (a) Докажите, что если компоненты тензора $\tilde{p}$ типа $\binom{0}{N}$ антисимметричны относительно любой пары индексов, то $\tilde{p}$ — антисимметричный тензор.

(b) Пусть $\{A_{ijk}\}$ — компоненты некоторого антисимметричного тензора Покажите, что

$$A_{ijk} = A_{[ijk]}$$

(c) Пусть $\mathbf{A}$ — антисимметричный тензор типа $\binom{0}{2}$, а $\mathbf{B}$ — произвольный тензор типа $\binom{2}{0}$. Покажите, что

$$A_{ij}B^{ij} = A_{ij}B^{[ij]},$$

т. е. что в свёртке $\mathbf{A}$ с $\mathbf{B}$ участвует лишь антисимметричная часть тензора $\mathbf{B}$.

(d) Пусть тензор $\mathbf{A}$ тот же, что и в (b), а $\mathbf{B}$ — *симметричный* тензор типа $\binom{2}{0}$, т. е. $\mathbf{B}(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}) = \mathbf{B}(\tilde{\sigma}, \tilde{\omega})$ для любых один-форм $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\sigma}$. Покажите, что

$$A_{ij}B^{ij} = 0. \qquad (4.6)$$

Антисимметричные тензоры обладают следующим важным свойством: антисимметричный тензор типа $\binom{0}{p}$ на n-мерном векторном пространстве ($p \leqslant n$) имеет не более чем

$$C_p^n = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \text{ [1]} \qquad (4.7)$$

---

[1] У нас принято обозначать эту величину через C_n^p. — *Прим. ред.*

независимых компонент. Чтобы доказать это, заметим, что всякая ненулевая компонента нашего тензора определяется p различными числами, выбираемыми из множества $(1, \ldots, n)$. (Числа должны быть попарно различными, ибо при любых двух равных индексах компонента антисимметричного тензора обращается в нуль; ср. с упр. 4.1.) Порядок, в каком выбраны эти p чисел, т. е. порядок индексов компоненты, влияет самое большее на её знак, следовательно, все компоненты, индексы которых являются перестановками заданного множества p чисел, можно считать известными, если известна хотя бы одна из них. Таким образом, число *независимых* компонент равно числу различных наборов из p чисел, выбранных из множества n чисел, а это как раз и есть биномиальный коэффициент, указанный выше.

Упражнение 4.3. Докажите, что если $p > n$, то все компоненты антисимметричного тензора типа $\binom{0}{p}$ на n-мерном векторном пространстве равны нулю.

4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Дифференциальная форма степени p, или, короче, *p-форма* ($p \geqslant 2$), — это, по определению, антисимметричный тензор типа $\binom{0}{p}$. Как уже было определено ранее, один-форма — это тензор типа $\binom{0}{1}$. Скалярные функции называются *нуль-формами.*

Упражнение 4.4. Покажите, что множество всех p-форм фиксированной степени p само является векторным пространством относительно операции сложения, определённой в упр. 2.4. Следовательно, оно является подпространством пространства всех тензоров типа $\binom{0}{p}$. Какова его размерность?

Точно так же, как тензоры типа $\binom{0}{2}$ можно получать из тензоров типа $\binom{0}{1}$ при помощи операции взятия тензорного произведения $\otimes$, так и два-формы можно строить из один-форм при помощи операции $\wedge$ (называемой операцией взятия *внешнего произведения*), которую мы сейчас и определим. Если $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ — один-формы, то их внешнее произведение задаётся формулой

$$\tilde{p} \wedge \tilde{q} \equiv \tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p}. \tag{4.8}$$

В отличие от формулы (4.2) множитель 1/2! здесь *отсутствует*!

Упражнение 4.5. Проверьте, что $\tilde{p} \wedge \tilde{q}$ есть два-форма. Покажите, что $\tilde{p} \wedge \tilde{p} = 0$.

Упражнение 4.6. Пусть $\{\bar{e}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ — базис данного векторного пространства, а $\{\tilde{\omega}^j\}$ — двойственный ему базис один-форм. Покажите, что $\{\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k,\ j, k = 1, \ldots, n\}$ будет базисом векторного пространства всех два-форм. Указание: для произвольной два-формы $\tilde{\alpha}$ рассмотрите числа $\alpha_{ij} = \tilde{\alpha}(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ и покажите, что

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2!} \alpha_{ij} \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j. \tag{4.9}$$

Обратите внимание на множитель 1/2! в (4.9); он обусловлен тем, что в рассматриваемую сумму по (i, j) равный вклад вносят $\tilde{\omega}^i \otimes \tilde{\omega}^j$ и $\tilde{\omega}^j \otimes \tilde{\omega}^i$. Появление этого множителя именно здесь объясняется тем, что мы не ввели его в определение внешнего произведения (см. (4.8)), как это делается в некоторых руководствах. Это дело вкуса.

Формула для внешнего произведения естественным образом распространяется на три-формы:

$$\begin{aligned} \tilde{p} \wedge (\tilde{q} \wedge \tilde{r}) &= (\tilde{p} \wedge \tilde{q}) \wedge \tilde{r} = \tilde{p} \wedge \tilde{q} \wedge \tilde{r} \\ &= \tilde{p} \otimes \tilde{q} \otimes \tilde{r} + \tilde{q} \otimes \tilde{r} \otimes \tilde{p} + - \ldots; \end{aligned} \tag{4.10}$$

фигурирующие здесь перестановки и знаки те же, что и в предыдущем параграфе. Заметим, что эта формула и её обобщение на случай любого конечного числа один-форм позволяют определить внешние произведения для произвольных p- и q-форм, ибо, согласно упр. 4.6, произвольную p-форму можно представить в виде линейной комбинации внешних произведений p один-форм (базисных один-форм).

Множество всех форм любой степени, снабжённое антикоммутативным умножением $\wedge$, называется *алгеброй Грассмана* (или *грассмановой алгеброй*).

Упражнение 4.7. Покажите, что сумма размерностей всех пространств p-форм, $p \leqslant n$, равна 2^n. (Указание: используйте биномиальную теорему.) Такова размерность пространства грассмановой алгебры.

Упражнение 4.8. Покажите, что если $\tilde{p}$ — один-форма, а $\tilde{q}$ — два-форма, то

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{ijk} = p_i q_{jk} + p_j q_{ki} + p_k q_{ij} = 3p_{[i} q_{jk]}.$$

Вообще покажите, что для любых p-формы $\tilde{p}$ и q-формы $\tilde{q}$

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{i \ldots jk \ldots l} = C_p^{p+q} \check{p}_{[i \ldots j} \check{q}_{k \ldots l]}. \tag{4.11}$$

4.4. ОБРАЩЕНИЕ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ

Алгебра форм достаточно проста, сложности связаны лишь с необходимостью следить за знаками и факториалами. Как будет видно из этого и последующих параграфов, лучший способ прийти к правильному результату — это действовать тщательно и неторопливо. Например, выведем правило коммутации форм. Если $\tilde{p}$ — p-форма, а $\tilde{q}$ — q-форма, то

◆ $$\tilde{p} \wedge \tilde{q} = (-1)^{pq} \tilde{q} \wedge \tilde{p}. \tag{4.12}$$

Чтоб убедиться в этом, представим $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ в виде суммы компонент, умноженных на внешние произведения форм $\tilde{\omega}^i \wedge \ldots \ldots \wedge \tilde{\omega}^j$ и $\tilde{\omega}^k \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^l$ (p и q множителей в каждом внешнем произведении соответственно), и покажем, что (4.12) выполнено для каждого простого произведения

$$(\tilde{\omega}^i \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^j) \wedge (\tilde{\omega}^k \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^l).$$

В силу ассоциативности внешнего произведения скобки в этом выражении можно опустить. Если переставить два любых множителя (например, $\tilde{\omega}^j$ и $\tilde{\omega}^k$), то выражение изменит знак. Переставляя $\tilde{\omega}^j$ с q множителями $\tilde{\omega}^k \wedge \ldots \ldots \wedge \tilde{\omega}^l$, мы изменим знак q раз, и в итоге

$$\tilde{\omega}^i \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^l = \\ = (-1)^q \tilde{\omega}^i \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^l \wedge \tilde{\omega}^j.$$

Проделав то же самое с каждым из p множителей $\tilde{\omega}^i \wedge \ldots \ldots \wedge \tilde{\omega}^j$, получим требуемый множитель $[(-1)^q]^p$, что и доказывает (4.12).

В дальнейшем нам понадобится операция *свёртки* вектора с формой. Чтоб получить из p-формы вещественное число, требуется p векторов. Если же подставлен только один аргумент, то p-форма превратится в $(p-1)$-форму. А именно, определим $(p-1)$-форму, полученную свёрткой p-формы $\tilde{\alpha}$ с вектором $\bar{\xi}$, следующей формулой:

◆ $$\tilde{\alpha}(\bar{\xi}) \equiv \tilde{\alpha}(\bar{\xi}, \underbrace{\ ,\ ,\ \ldots,\ }_{p-1 \text{ пустых мест}}), \quad [\tilde{\alpha}(\bar{\xi})]_{j \ldots k} = \alpha_{ij \ldots k} \xi^i. \tag{4.13}$$

Заметим, что если мы поставим $\bar{\xi}$ вместо первого на какое-то другое место, то это скажется только на знаке $\tilde{\alpha}(\bar{\xi})$. Чтоб понять, как это происходит, рассмотрим $\tilde{\alpha} = \tilde{p} \wedge \tilde{q}$, где $\tilde{p}$ и

$\tilde{q}$ — 1-формы:

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})(\bar{\xi}) = (\tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p})(\bar{\xi}) = \tilde{p}(\bar{\xi})\tilde{q} - \tilde{q}(\xi)\tilde{p}.$$

Таким образом, хотя $\bar{\xi}$ свёртывается с первым аргументом $\tilde{p} \wedge \tilde{q}$, перестановки, которых требует операция внешнего произведения, приводят к тому, что $\bar{\xi}$ свёртывается с каждой из 1-форм, входящих в это произведение. Аналогично для произведения p штук 1-форм мы находим

$$\begin{aligned}(\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k)(\bar{\xi}) = \xi^i \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k \\ - \xi^j \tilde{\omega}^i \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k + \ldots \\ \pm \xi^k \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \\ = p\xi^{[i} \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{k]}.\end{aligned} \qquad (4.14)$$

Из этой формулы и обобщения формулы (4.2) следует, что если $\tilde{\alpha}$ — p-форма, то

$$\tilde{\alpha}(\bar{\xi}) = \frac{1}{(p-1)!} \xi^i \alpha_{ij \ldots k} \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k. \qquad (4.15)$$

Этот ответ, конечно, прямо следует из (4.13) и (4.9). Аналогично если $\tilde{\alpha}$ — произвольная форма, а $\tilde{\beta}$ — p-форма, то

◆ $$(\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha})(\bar{\xi}) = \tilde{\beta}(\bar{\xi})\tilde{\alpha} + (-1)^p \tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}(\bar{\xi}). \qquad (4.16)$$

Это можно доказать, рассматривая опять каждую компоненту $\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}$ по отдельности.

Упражнение 4.9. Докажите (4.16).

Для $\tilde{\alpha}(\bar{\xi})$ широко применяется и другое обозначение: $\bar{\xi} \lrcorner \tilde{\alpha}$

4.5. ОГРАНИЧЕНИЕ ФОРМ

Элементарным, но важным является понятие ограничения (сужения) формы на подпространство исходного векторного пространства V. Поскольку p-форма есть тензор типа $\binom{0}{p}$, её областью определения служит множество всех векторов из V (точнее, областью определения служит *произведение* $V \times V \times \ldots \times V$ p экземпляров пространства V). *Ограничение* (*или сужение*) $\tilde{\alpha}$ на подпространство W пространства V — это та же самая p-форма $\tilde{\alpha}$, только её область определения ограничена векторами из W. Мы обозначаем её $\tilde{\alpha}|_W$:

$$\tilde{\alpha}|_W(\bar{X}, \ldots, \bar{Y}) = \tilde{\alpha}(\bar{X}, \ldots, \bar{Y}),$$

где все $\bar{X}, \ldots, \bar{Y}$ — из W. Таким образом, форма $\tilde{\alpha}|_W$ определена лишь на W. Заметим, что если размерность W m меньше p, то сужение $\tilde{\alpha}|_W$ — просто нуль (при $p > m$ любая p-форма

на m-мерном пространстве — нулевая), а если $p = m$, то $\tilde{\alpha}|_W$ имеет одну независимую компоненту. Операцию сужения часто называют «сечением», поскольку наглядно векторное подпространство W можно представлять себе в виде плоскости, рассекающей семейство поверхностей, представляющих форму. Говорят, что форма *аннулируется* векторным пространством, если её сужение на это пространство обращается в нуль.

4.6. ПОЛЯ ФОРМ

Как и для всякого тензора, *поле* p-форм на многообразии M есть правило (удовлетворяющее соответствующим условиям дифференцируемости), сопоставляющее каждой точке многообразия M p-форму. Поэтому все сделанные нами раньше замечания применимы к формам, рассматриваемым как функции на пространстве T_P в каждой точке P многообразия M. Лишь один пункт нуждается в уточнении: поскольку любое подмногообразие S выделяет в каждой точке P, принадлежащей S, подпространство V_P касательного пространства T_P, мы определим сужение поля p-форм $\tilde{\alpha}$ на S как поле, образованное сужением $\tilde{\alpha}$ на V_P в каждой точке P. Для случая 1-форм мы уже имели пример такого сужения в § 3.6.

4.7. ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ

На любом n-мерном многообразии пространство n-форм в каждой точке одномерно (см. (4.7)). Выберем некоторое поле n-форм и обозначим его $\tilde{\omega}$. Рассмотрим векторный базис $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ в точке P. Поскольку векторы базиса линейно-независимы, то $\tilde{\omega}(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\tilde{\omega} \neq 0$ в точке P. Поэтому $\tilde{\omega}$ делит множество *всех* базисов в точке P на два класса: базисы, на которых $\tilde{\omega}$ положительна, и те, на которых она отрицательна. На самом деле эти классы не зависят от конкретного выбора формы $\tilde{\omega}$. А именно, если $\tilde{\omega}'$ — другая n-форма, отличная от нуля в точке P, то существует число $f \neq 0$, такое что $\tilde{\omega}' = f\tilde{\omega}$. Если $\tilde{\omega}$ положительна на каких-то двух базисах, то и $\tilde{\omega}'$ будет иметь на них один и тот же знак (плюс, если $f > 0$, и минус, если $f < 0$) и оба базиса опять-таки окажутся в одном классе. Итак, все базисы в данной точке попадают в один из двух классов: *правозакрученные* и *левозакрученные*. (Как называть какой класс, конечно же, вопрос соглашения; важно то, что сами классы чётко определены.) Многообразие называется (внутренне) *ориентируемым*, если возможно определить закрученность согласованно (т. е. непрерывно) на всём много-

образии, иными словами, если существует n непрерывных векторных полей $\{\bar{e}_1(P), \ldots, \bar{e}_n(P)\}$, таких что в каждой точке P они образуют базис одной и той же ориентации. Понятно, что это эквивалентно существованию n-формы, всюду непрерывной и отличной от нуля. Эвклидово пространство ориентируемо, лист Мёбиуса нет.

4.8. ОБЪЁМЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ОРИЕНТИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Вспомним, что формы связаны с элементом объёма. На n-мерном многообразии набор из n линейно-независимых «бесконечно-малых» векторов определяет область ненулевого объёма, n-мерный параллелепипед. Объём этой области есть значение n-формы. Можно выбрать любую n-форму в качестве формы объёма; этот выбор диктуется лишь рассматриваемой задачей.

Интегрирование функции на многообразии сводится по существу к умножению значения функции на объём малого координатного элемента, а затем к суммированию полученных чисел. Возвращаясь к форме объёма, введем удобные обозначения. Пусть $\tilde{\omega}$ — это n-форма в области U n-мерного многообразия M с координатами $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Тогда, поскольку все n-формы в данной точке образуют одномерное векторное пространство, существует некоторая функция $f(x^1, \ldots, x^n)$, такая что

$$\tilde{\omega} = f\tilde{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n.$$

Чтоб проинтегрировать по области U, разобьём её на маленькие области («ячейки») — параллелепипеды, построенные на n векторах $\{\Delta x^1\partial/\partial x^1, \ldots, \Delta x^n\partial/\partial x^n\}$, где $\{\Delta x^i\}$ — малые числа. Интеграл функции f по одной ячейке аппроксимируем значением f, умноженным на произведение

$$\Delta x^1\Delta x^2 \ldots \Delta x^n = \tilde{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n(\Delta x^1\partial/\partial x^1, \ldots, \Delta x^n\partial/\partial x^n).$$

Таким образом,

$$\int_{\text{ячейка}} f(x^1, \ldots, x^n) \cong \tilde{\omega}\,(\text{ячейка}). \tag{4.17}$$

Просуммировав по всем ячейкам и взяв предел при стремящемся к нулю размере ячейки, мы получим то, что будем называть *интегралом* $\tilde{\omega}$ *по* U:

$$\blacklozenge \quad \int \tilde{\omega} \equiv \int f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1 \ldots dx^n, \tag{4.18}$$

где в правой части равенства стоит обычный интеграл дифференциального исчисления, а в левой части — наше новое обозначение. Поскольку левая часть не зависит от координат явно, то надо доказать, что она действительно не зависит от выбора системы координат на U. Мы ограничимся в нашем доказательстве случаем двух измерений, поскольку общий случай из него тривиально вытекает. Рассмотрим координаты λ и μ. Тогда

$$\int \tilde{\omega} \equiv \int f(\lambda, \mu) \tilde{d}\lambda \wedge \tilde{d}\mu = \int f(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu.$$

Если перейти к другим координатам x и y, то из определения $\tilde{d}\lambda$ как градиента и правила дифференцирования сложной функции следует, что

$$\tilde{d}\lambda = \tilde{d}\lambda(x, y) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\tilde{d}x + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\tilde{d}y,$$

$$\tilde{d}\mu = \frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{d}x + \frac{\partial\mu}{\partial y}\tilde{d}y.$$

Итак, мы получаем (напомним, что $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}x = 0$ в силу антисимметричности)

$$\begin{aligned}\tilde{d}\lambda \wedge \tilde{d}\mu &= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\tilde{d}x + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\tilde{d}y\right) \wedge \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{d}x + \frac{\partial\mu}{\partial y}\tilde{d}y\right)\\ &= \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{d}y \wedge \tilde{d}x\\ &= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y.)\end{aligned} \tag{4.19}$$

Множитель перед $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y$ — это якобиан преобразования координат $\partial(\lambda, \mu)/\partial(x, y)$. Мы знаем из обычного интегрального исчисления, что именно так и должен преобразовываться элемент объёма. Таким образом, (λ, μ)-интеграл от f связан с. (x, y)-интегралом в точности так, как надо.

Однако значение $\int \tilde{\omega}$ не является совершенно нечувствительным к выбору исходной системы координат. Мы показали лишь то, что оно не меняется при преобразованиях координат, но уже в самой формуле (4.17) имеется неопределённость в знаке. На этой формуле основано само определение $\int \tilde{\omega}$, и, следуя ему, мы получим $\int \tilde{\omega}$ с другим знаком, если базис, отвечающий исходной координатной системе, будет иметь ориентацию, противоположную той, которую мы выбрали. Правая часть (4.17) останется той же — форма не зависит от выбора базиса, но функция f в левой части изменит знак. (Такое изменение знака не имеет ничего общего с только что

рассмотренными координатными преобразованиями: там $d^n x$ умножилось бы на отрицательный якобиан, и всё было бы в порядке. Изменение знака происходит в самом исходном определении $\int \tilde{\omega}$ через обычный интеграл.) Избежать этой неопределённости нельзя. Общепринятый выход из положения — выбрать на U некоторую ориентацию, т. е. определить, какое из двух семейств базисов будет правозакрученным, и использовать в определении (4.17) только правые координатные системы. Итак, мы видим, что интеграл от $\tilde{\omega}$ по области U не зависит ни от чего, кроме ориентации.

Во всех этих рассуждениях существенную роль играло то обстоятельство, что U можно покрыть единой координатной системой. Можно ли распространить интеграл на всё M, которое может и не иметь глобальной системы координат? Ясно, что если две координатные карты имеют односвязную область перекрытия, то ориентация на одной карте однозначно индуцирует ориентацию на другой и интеграл по объединению двух областей корректно определён. Ясно, что охватить всё M таким образом можно тогда и только тогда, когда M ориентируемо. С этого момента мы ограничимся интегрированием на ориентируемых многообразиях; стоит, однако, заметить, что теория интегрирования была распространена де Рамом и на неориентируемые многообразия, и эта обобщённая теория имеет интересные физические приложения (см. статью Соркина (1977), указанную в библиографии в конце главы).

Для интегрирования, которое мы определили, всегда требуются формы максимальной степени: n-формы на n-мерном многообразии. Конечно, можно интегрировать и p-форму по p-мерному подмногообразию, если оно внутренне ориентируемо. Как связана ориентируемость подмногообразия S с ориентируемостью M? Предположим, что M ориентируемо и P — точка из S. Можно ли однозначно «индуцировать» ориентацию p-форм в точке P с помощью заданной n-формы $\tilde{\omega}$, которую мы считаем «правозакрученной», или «положительно ориентированной»? К сожалению, нет: сама по себе $\tilde{\omega}$ на S не значит ничего, ведь её сужение на S — тождественный нуль, так как $p < n$. Обычно делается следующее: форма $\tilde{\omega}$ редуцируется от n-формы до p-формы с помощью $n - p$ линейно-независимых «нормальных» (т. е. не являющихся касательными к S) векторов в точке P и, по определению, сужение p-формы

$$\tilde{\omega}(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_{n-p})$$

на S считается правозакрученным. Это определение явно зависит от выбора векторов $\{\bar{n}_i\}$, включая и порядок, в котором

они пронумерованы. Такой способ выбора ориентации называется *внешней ориентацией* на S в точке P. Мы приведём соответствующий пример позже, при доказательстве теоремы Стокса. Если оказывается возможным задать внешнюю ориентацию $\{\bar{n}_i, i = 1, \quad , n-p\}$ на всем S непрерывно («непрерывно» означает и то, что векторы $\bar{n}_i$ всегда остаются линейно-

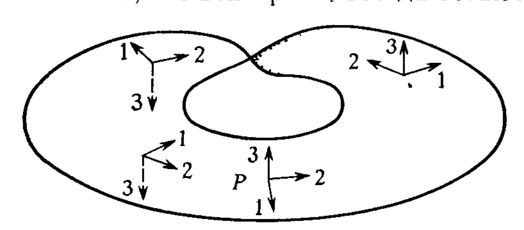


Рис 4 5 Лист Мебиуса в R^3 Проще всего представлять его сделанным из резины и плоско лежащим на странице, за исключением верхней части рисунка, где он один раз перекручен Если репер в точке P "пронести" вдоль замкнутой кривой, изображенной штриховой линией, то вернувшийся репер нельзя перевести в исходный непрерывной деформацией, при которой векторы 1 и 2 остаются все время на листе и все три вектора остаются линейно независимыми

независимы и не являются касательными к S), то S называется *внешне ориентируемым*

Ясно, что если существует какая-то ориентируемая открытая область многообразия M, содержащая S, то S либо ориен-

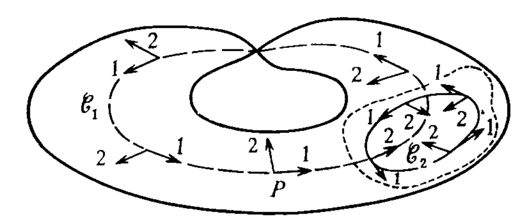


Рис 4 6 Кривые на листе Мебиуса Кривая $\mathscr{C}_1$ не является внешне ориентируемой если пару векторов 1 и 2 в точке P пронести вокруг ленты, как на рис 4 5, то получившуюся после возвращения в начальную точку пару нельзя привести к исходному виду непрерывной деформацией, при которой вектор 1 остается все время касательным к штриховой линии и оба вектора остаются линейно независимыми Кривая же $\mathscr{C}_2$ внешне ориентируема, поскольку у нее существует окрестность (пунктирная линия), в которой возможен согласованный выбор ориентации

тируемо сразу и внутренне и внешне, либо не ориентируемо вовсе; если же такой области не существует, то для S может реализоваться лишь первая возможность, но не обе сразу. Например, рассмотрим лист (ленту) Мёбиуса в качестве двумерного подмногообразия R^3 (рис. 4.5) и кривую на этой ленте в качестве её одномерного подмногообразия (рис. 4.6). Зададим в некоторой точке P ленты правозакрученную тройку

векторов, два из которых лежат на ленте, а третий вне неё. Обнесём эту тройку один раз вокруг ленты так, чтоб два вектора всегда оставались касательными к ней. Тогда направленный наружу вектор вернётся в точку P направленным в противоположную сторону — лента Мёбиуса не является внешне ориентируемой в R^3. Аналогично, рассмотрим пару векторов на ленте, один из которых касателен к кривой $\mathscr{C}_1$, а другой нет. После переноса вокруг кривой вектор, направленный наружу, окажется по другую сторону кривой. Хотя мы знаем, что наша кривая внутренне ориентируема, это свойство не зависит от того, в какое пространство она погружена, её нельзя внешне ориентировать в большем неориентируемом многообразии. Напротив, кривая $\mathscr{C}_2$ ориентируема и внутренне и внешне на ленте Мёбиуса, поскольку она не «чувствует» неориентируемости ленты — у $\mathscr{C}_2$ есть на ленте ориентируемая окрестность.

4.9. N-ВЕКТОРЫ, ДУАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СИМВОЛ $\varepsilon_{ij\ldots k}$

До сих пор мы ограничивались рассмотрением антисимметричных тензоров типа $\binom{0}{N}$, но и для тензоров типа $\binom{N}{0}$ можно таким же образом построить грассманову алгебру. Антисимметричный тензор типа $\binom{N}{0}$ называется *N-вектором.* Также как и в случае форм, векторное пространство всех p-векторов в данной точке n-мерного многообразия имеет размерность $C^n{}_p$.

Заметим, что в любой точке есть четыре векторных пространства с одинаковой размерностью: пространства p-форм, $(n-p)$-форм, p-векторов и $(n-p)$-векторов все имеют размерность $C^n{}_p = C^n{}_{n-p}$ При соответствующих обстоятельствах можно строить 1-1-соответствия между различными парами этих пространств. Мы видели в § 2.29, что метрический тензор задает 1-1-соответствие между тензорами типа $\binom{0}{p}$ и типа $\binom{p}{0}$. Нетрудно видеть, что это отображение сохраняет антисимметричность, следовательно, оно обратимо отображает p-формы в p-векторы. Вне зависимости от того, задана метрика или нет, всякая n-форма объёма $\tilde{\omega}$ (т. е. n-форма, нигде не обращаются в нуль) обеспечивает существование отображения p-форм в $(n-p)$-векторы. Это отображение называется *отображением дуализации*, и сейчас мы покажем, как оно строится. (Не путайте это отображение, которое зависит от $\tilde{\omega}$ и каждому отдельному тензору типа $\binom{0}{p}$ сопо-

ставляет тензор типа $\binom{n-p}{0}$ и наоборот, с понятием дуального базиса один-форм, обсуждавшимся в гл. 2: там нет зависимости от $\tilde{\omega}$ и там *набор* из n тензоров типа $\binom{1}{0}$ отображается в *набор* из n тензоров типа $\binom{0}{1}$ и наоборот.)

Для данного q-вектора $\mathbf{T}$ с компонентами $T^{i\ \ k} = T^{[i\cdots k]}$ (q индексов) определим тензор $\tilde{A}$ следующим соотношением:

◆ $$A_{j\ldots l} = \frac{1}{q!}\,\omega_{i\ldots kj\ldots l}T^{i\ldots k}. \qquad (4.20)$$

Символически мы будем писать

$$\tilde{A} = \tilde{\omega}\,(\mathbf{T})$$

или проще

◆ $$\tilde{A} = {}^*\,\mathbf{T} \qquad (4.21)$$

Мы будем говорить, что $\tilde{A}$ *дуален к* $\mathbf{T}$ *относительно* $\tilde{\omega}$. Из (4.20) и антисимметричности $\omega_{i\,\cdot\,l}$ относительно перестановки любых двух индексов очевидно следует, что $\tilde{A}$ — антисимметричный тензор степени $n-q$ (это — число индексов $\tilde{\omega}$, оставшихся свободными после свёртки с q индексами $\mathbf{T}$). Таким образом, $\tilde{A}$ есть $(n-q)$-форма. Описанное отображение однозначно определяет $(n-q)$-форму для каждого q-вектора. То что оно обратимо, мы покажем позже, а сейчас продемонстрируем, что это отображение уже встречалось читателю при изучении *векторного произведения* в векторной алгебре трёхмерного эвклидова пространства.

Чтоб это понять, вспомним, что в эвклидовом пространстве обычно не различают векторы и один-формы: в декартовых координатах компоненты вектора и ассоциированной с ним один-формы совпадают. Рассмотрим два вектора $\bar{U}$ и $\bar{V}$ и отвечающие им один-формы $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$. Два-форма $\tilde{U}\wedge\tilde{V}$ имеет $C^3_2 = 3$ независимых компонент $U_1V_2 - U_2V_1$, $U_1V_3 - U_3V_1$, $U_2V_3 - U_3V_2$. Вектор $\bar{U}\times\bar{V}$ имеет те же компоненты, и легко показать, что

$$^*(\bar{U}\times\bar{V}) = \tilde{U}\wedge\tilde{V} \quad \text{(размерность 3)}. \qquad (4.22)$$

Упражнение 4.10. Докажите (4.22), используя (4.20).

Это проливает свет на странные обстоятельства, связанные с векторным произведением: почему оно вообще существует, почему оно не существует в размерностях, не равных трём (только в случае размерности 3 отображение дуализации превращает векторы в два-формы), и почему $\bar{U}\times\bar{V}$ — «аксиальный» вектор. Последнее объясняется тем, что в эвклидовом пространстве принято определять $\tilde{\omega}$ так, чтобы базису

$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ соответствовал положительный объём. Если ориентация базиса меняется, то то же происходит и со знаком $\tilde{\omega}$, а следовательно, и со знаком $\bar{U} \times \bar{V}$ (который зависит от знака $\tilde{\omega}$, поскольку с помощью $\tilde{\omega}$ вектор $\bar{U} \times \bar{V}$ отображается в форму $\tilde{U} \wedge \tilde{V}$, знак которой не должен меняться). Вот векторное произведение и меняет знак при отражении координат.

Соответствие между T и ${}^*\mathsf{T}$ обратимо, поскольку они имеют по одинаковому числу компонент. (Иными словами, свёртка T с $\tilde{\omega}$ в (4.20) не приводит к потере информации, содержащейся в T поскольку T уже был антисимметричен по всем своим индексам.) Таким образом, для данной p-формы $\tilde{A}$ существует *единственный* $(n-p)$-вектор T, такой что $\tilde{A} = {}^*\mathsf{T}$ Это можно формально записать, введя n-вектор $\omega^{i \dots k}$, обратный к $\tilde{\omega}$, определяемый соотношением

$$\omega^{i \dots k}\omega_{i \dots k} = n!. \tag{4.23}$$

Множитель $n!$ необходим, поскольку сумма в (4.23) содержит $n!$ одинаковых слагаемых $\omega^{123 \dots n}\omega_{123 \dots n} = \omega^{213 \dots n}\omega_{213 \dots n} = \dots$; он обеспечивает нужную нормировку:

$$\omega^{123 \dots n} = \frac{1}{\omega_{123 \dots n}}. \tag{4.24}$$

Мы говорим, что тензор S *дуален* к p-форме $\tilde{B}$ *относительно* $\tilde{\omega}$, и пишем

$$\blacklozenge \quad \mathsf{S} = {}^*\tilde{B}, \tag{4.25}$$

если

$$\blacklozenge \quad S^{i \dots k} = \frac{1}{p!}\,\omega^{l \dots mi \dots k}B_{l \dots m}. \tag{4.26}$$

То что два введённых отображения дуализации взаимно обратны, мы покажем сначала на примере числовой функции. Функция f, рассматриваемая как 0-вектор, имеет дуальную n-форму $f\tilde{\omega}$ Этой n-форме дуален 0-вектор

$${}^*(f\tilde{\omega}) = \frac{1}{n!}\,\omega^{l \dots m}\left(f\omega_{l \dots m}\right) = f,$$

Итак, мы доказали, что ${}^{**}f = f$.

В общем случае рассуждаем так. Начнём с p-формы $\tilde{B}$ и определим $(n-p)$-вектор S с помощью (4.26). Применим к S оператор дуализации:

$$\begin{aligned}({}^*\mathsf{S})_{j \dots l} &= \frac{1}{(n-p)!}\,\omega_{i \dots kj \dots l}S^{i \dots k} \\ &= \frac{1}{p!\,(n-p)!}\omega_{i \dots kj \dots l}\omega^{r \dots si \dots k}B_{r \dots s} \\ &= \frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!\,(n-p)!}\,\omega_{i \dots kj \dots l}\omega^{i \dots kr \dots s}B_{r \dots s}.\end{aligned}$$

Чтобы получить последнюю строчку, надо было переставить каждый из $n-p$ индексов $i \ldots k$ со всеми p индексами $r \ldots s$, что и дало $n-p$ множителей $(-1)^p$. Дадим индексам $(j \ldots l)$ конкретные значения, например $(1 \ldots p)$. (Понятно, что несущественно, как именно они «называются».) Тогда в сумме (при фиксированных $(r \ldots s)$)

$$\omega_{i \ldots k 1 \ldots p}\omega^{i \ldots k r \ldots s}$$

индексы $i \ldots k$ надо выбирать из множества $(p+1, \ldots, n)$. Таким образом, в сумме получится $(n-p)!$ ненулевых слагаемых и все они будут равны друг другу, в точности как в (4.23); следовательно,

$$\omega_{i \ldots k 1 \ldots p}\omega^{i \ldots k r \ldots s} = (n-p)!\, \omega_{p+1 \ldots n 1 \ldots p}\omega^{p+1 \ldots n r \ldots s}.$$

Далее, это равно нулю во всех случаях, когда $(r \ldots s)$ не есть перестановка из $(1 \ldots p)$, ибо тогда у второго ω будут иметься совпадающие индексы. В сумме по $(r \ldots s)$

$$\omega^{p+1 \ldots n r \ldots s}B_{r \ldots s}$$

есть $p!$ ненулевых слагаемых, опять-таки равных друг другу. Итак, мы получаем

$$\omega^{p+1 \ldots n r \ldots s}B_{r \ldots s} = p!\, \omega^{p+1 \ldots n 1 \ldots p}B_{1 \ldots p}.$$

Вместе эти формулы дают

$$({}^*\mathbf{S})_{1 \ldots p} = (-1)^{p(n-p)}\omega_{p+1 \ldots n 1 \ldots p}\omega^{p+1 \ldots n 1 \ldots p}B_{1 \ldots p}.$$

Но из (4.24) вытекает, что

$$\omega_{p+1 \ldots n 1 \ldots p}\omega^{p+1 \ldots n 1 \ldots p} = 1;$$

следовательно,

$$({}^*\mathbf{S})_{1 \ldots p} = (-1)^{p(n-p)}B_{1 \ldots p}.$$

Поскольку метки $1 \ldots p$ могли представлять произвольные индексы, то мы доказали, что

$$\blacklozenge \quad {}^{**}\tilde{B} = (-1)^{p(n-p)}\tilde{B}. \tag{4.27a}$$

Аналогично если бы мы начали с q-вектора $\mathbf{T}$ то получили бы

$$\blacklozenge \quad {}^{**}\mathbf{T} = (-1)^{q(n-q)}\mathbf{T}. \tag{4.27b}$$

Заметим, что при нечётных n множитель $(-1)^{p(n-p)}$ всегда равен $+1$.

Как мы уже раньше отмечали, метрика отображает p-формы в p-векторы. В сочетании с отображением дуализации это даёт отображение p-форм в $(n-p)$-формы, или q-векторов в $(n-q)$-векторы. Обычно это отображение по-прежнему

обозначается просто через *. Нужна, правда, известная бдительность в отношении знаков в случае, если метрика индефинитна (когда, как в теории относительности, некоторые длины положительны, а некоторые отрицательны). В деталях мы обсудим это попозже. Один пример использования такой операции дуальности дан в упр. 5.13.

В алгебре форм часто бывает удобно употреблять антисимметричные *символы Леви-Чивиты*

$$\varepsilon_{ij\ldots k}=\varepsilon^{ij\ldots k}\equiv\begin{cases}+1, & \text{если } ij\ldots k \text{ — четная перестановка чисел } 1, 2, \ldots, n;\\ -1, & \text{если } ij\ldots k \text{ — нечетная перестановка чисел } 1, 2, \ldots, n;\\ 0 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases} \tag{4.28}$$

◆

Например, форма $\tilde{d}x^1\wedge\tilde{d}x^2\wedge\tilde{d}x^3$ на трёхмерном многообразии будет иметь компоненты ε_{ijk} в системе координат (x^1, x^2, x^3) и компоненты $h\varepsilon_{ijk}$ в любой другой системе координат, где h — некоторая функция. Предположим, что n-форма объёма $\tilde{\omega}$ имеет компоненты

$$\omega_{ij\ldots k}=f\varepsilon_{ij\ldots k}, \tag{4.29}$$

где f — некоторая функция. Тогда обратный к ней n-вектор имеет компоненты

$$\omega^{ij\ldots k}=\frac{1}{f}\varepsilon^{ij\ldots k}. \tag{4.30}$$

4.10. ТЕНЗОРНЫЕ ПЛОТНОСТИ

Нами принята та точка зрения, что любая ненулевая n-форма на n-мерном многообразии определяет элемент объёма. В реальных задачах подчас встречается сразу несколько таких n-форм. (Примером может служить течение идеальной жидкости, рассматриваемое в гл. 5. На трёхмерном многообразии эвклидова пространства есть три физически существенные три-формы: одна, интеграл от которой задаёт объём области, другая — массу, а третья — некоторую сохраняющуюся величину, связанную с завихрённостью.) Поэтому иногда удобнее соотносить все такие формы с одной *зависящей от выбора системы координат* n-формой $\tilde{d}x^1\wedge\tilde{d}x^2\wedge\ldots\wedge\tilde{d}x^n$, компоненты которой суть просто $\varepsilon_{ij\ldots k}$. Если $\tilde{\omega}$ — рассматриваемая n-форма, то соотношение (4.29), пере-

писанное в виде

$$\omega_{ij\ldots k} = \mathfrak{w}\varepsilon_{ij\ldots k},$$

определяет величину $\mathfrak{w}$, называемую *скалярной плотностью*. Хотя $\mathfrak{w}$ — функция на многообразии, она не является настоящим скаляром, поскольку зависит от выбора координат. При преобразовании координат $x^{i'} = f^i(x^j)$ компоненты $\tilde{\omega}$ умножаются на якобиан J этого преобразования (см. (4.19)), в то время как $\varepsilon_{ij\ldots k}$ *по определению* остаются неизменными. Таким образом, $\mathfrak{w}$ преобразуется по правилу

$$\mathfrak{w}' = J\mathfrak{w}.$$

Это закон преобразования скалярной плотности веса 1. (Термин «вес» будет определён позднее.) Всё это можно обобщить и на тензорные плотности. Предположим, например, что $\mathbf{T}$ — тензор типа $\binom{2}{n}$ на n-мерном многообразии, антисимметричный по своим векторным аргументам:

$$T^{ij}{}_{\underbrace{k\ldots l}_{n \text{ индексов}}} = T^{ij}{}_{[k\ldots l]}.$$

Тогда, после свёртки с двумя один-формами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, $\mathbf{T}$ задаёт форму объёма $\tilde{t}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$:

$$\tilde{t}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \mathbf{T}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta};\ ,\ \ldots,\ ),$$

$$t_{k\ldots l} = T^{ij}{}_{k\ldots l}\alpha_i\beta_j.$$

(Такие тензоры появляются в физике. Например, тензор напряжений, упоминавшийся в гл. 2, определяет плотность напряжений, когда заданы две один-формы; *полное* напряжение есть интеграл от неё по всему объёму, интеграл от свёртки тензора типа $\binom{2}{n}$, полученного умножением тензора напряжений на форму объёма.) Компоненты $\mathbf{T}$ можно представить в виде

$$T^{ij}{}_{k\ldots l} = \mathfrak{T}^{ij}\varepsilon_{k\ldots l},$$

откуда определяются числа $\{\mathfrak{T}^{ij}\}$, являющиеся компонентами тензорной плотности типа $\binom{2}{0}$. (Для обозначения тензорных плотностей общепринято использовать готические буквы.) Законом преобразования для такой плотности будет

$$\mathfrak{T}^{i'j'} = J\Lambda^{i'}{}_k\Lambda^{j'}{}_l\mathfrak{T}^{kl}, \tag{4.31}$$

где J, как и раньше, — якобиан (определитель матрицы $\Lambda^{i'}{}_{j'}$). Это закон преобразования для тензорной плотности типа $\binom{2}{0}$ веса 1.

Термин *вес* указывает, сколько якобианов J в законе преобразования. Например, число $\mathfrak{w}$, преобразующееся по закону

$$\mathfrak{w}' = J^2\mathfrak{w},$$

есть скалярная плотность веса два. Обобщение на тензорные плотности и на другие веса очевидно. Обычные тензоры — это плотности веса нуль. Интерпретация плотностей с весом, отличным от нуля или единицы, довольно сложна, но такие величины действительно оказываются иногда полезными. В этой книге мы не будем работать с плотностями, отдавая предпочтение формам как таковым.

4.11. ОБОБЩЕННЫЕ СИМВОЛЫ КРОНЕКЕРА

У символов Леви-Чивиты есть много полезных и интересных свойств; некоторыми мы воспользуемся в этом и следующем параграфах. Как мы видели раньше, часто приходится сталкиваться с произведениями нескольких ε, такими как $\varepsilon^{ij\,\dots\,k}\varepsilon_{il\,\dots\,m}$. Возможно развить систематический и удобный способ работы с ними.

Прежде всего заметим, что в двух измерениях для любой ненулевой два-формы $\tilde{\omega}$ мы имеем

$$\omega_{ij}\omega^{kl} = \varepsilon_{ij}\varepsilon^{kl} = \delta^k{}_i\delta^l{}_j - \delta^k{}_j\delta^l{}_i. \tag{4.32}$$

Первое равенство следует из (4.29) и (4.30). Простейший способ установить второе равенство — это заметить, что обе части антисимметричны относительно $(k,\ l)$ и $(i,\ j)$; поэтому достаточно рассмотреть случай $i \neq j,\ k \neq l$. С точностью до знака есть только один такой член, а именно $\varepsilon_{12}\varepsilon^{12} = 1$. Легко видеть, что правая часть тоже дает единицу, что и доказывает равенство. Похожая цепь рассуждений приводит нас к ответу в общем случае n измерений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij\,\dots\,k}\varepsilon^{lm\,\dots\,r} &= \delta^l{}_i\delta^m{}_j \dots \delta^r{}_k - \delta^l{}_j\delta^m{}_i \dots \delta^r{}_k + \dots \\ &= n!\,\delta^l{}_{[i}\delta^m{}_j \dots \delta^r{}_{k]}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Существует сокращённая запись для всего этого. Определим p-дельта-символ как

◆ $$\delta^{i\,\dots\,j}_{k\,\dots\,l} = p!\,\delta^i{}_{[k} \dots \delta^j{}_{l]}, \tag{4.34}$$

где каждое из множеств $(i\ \dots\ j)$ и $(k\ \dots\ l)$ содержит по p индексов. В частности,

◆ $$\varepsilon_{ij\,\dots\,k}\varepsilon^{lm\,\dots\,r} = \delta^{lm\,\dots\,r}_{ij\,\dots\,k}. \tag{4.35}$$

Можно получить p-дельта-символ из $(p+1)$-дельта-символа с помощью свёртки, например по первому индексу. Начнём с

$$\delta^{ijk\dots l}_{imr\dots s}=(p+1)!\,\delta^i{}_{[i}\delta^j{}_m\delta^k{}_r\dots\delta^l{}_{s]}.$$

Члены суммы можно перегруппировать следующим образом:

$$\begin{aligned}&=p!\,\delta^i{}_i\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r\dots\delta^l_{s]}-p!\,\delta^i{}_m\delta^j{}_{[i}\delta^k{}_r\dots\delta^l{}_{s]}\\&\quad-p!\,\delta^i{}_r\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_i\dots\delta^l{}_{s]}-\dots-p!\,\delta^i{}_s\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r\dots\delta^l{}_{i]}\\&=p!\,\{n\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r\dots\delta^l{}_{s]}-\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r\dots\delta^l{}_{s]}\\&\quad-\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r\dots\delta^l{}_{s]}-\dots-\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r\dots\delta^l{}_{s]}\},\end{aligned}$$

что даёт

◆ $$\delta^{ij\dots l}_{im\dots s}=(n-p)\,\delta^{j\dots l}_{m\dots s} \qquad (4.36)$$

для один раз свёрнутой $(p+1)$-дельты в n-мерном пространстве.

Упражнение 4.11. (a) Обоснуйте каждый шаг в выводе (4.36).

(b) Получите p-дельту из n-дельты с помощью $n-p$ свёрток:

$$\delta^{\overbrace{r\dots s}\,\overbrace{i\dots j}}_{\underbrace{r\dots s}_{n-p}\,\underbrace{k\dots l}_{p}}=(n-p)!\,\delta^{i\dots j}_{k\dots l}. \qquad (4.37)$$

В качестве примера использования этой алгебры вычислим *двойное векторное произведение* в трёхмерном эвклидовом пространстве. В декартовых координатах оператор * выражается через ε, и

$$(\overline{U}\times\overline{V})_i=\varepsilon_{ijk}U^jV^k,$$

поэтому

$$\begin{aligned}[\overline{W}\times(\overline{U}\times\overline{V})]_i&=\varepsilon_{ijk}W^j\varepsilon_{klm}U^lV^m\\&=\varepsilon_{kij}\varepsilon^{klm}W^jU_lV^m.\end{aligned}$$

Из (4.34) и (4.36) получаем

$$\begin{aligned}[\overline{W}\times(\overline{U}\times\overline{V})]_i&=(\delta^l{}_i\delta^m{}_j-\delta^l{}_j\delta^m{}_i)\,W^jU_lV_m\\&=U_i(\overline{W}\cdot\overline{V})-V_i(\overline{W}\cdot\overline{U}).\end{aligned}$$

Вывод настолько прост, что делает совершенно ненужным заучивание формулы двойного векторного произведения.

4.12. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И $\varepsilon_{ij\ldots k}$

Рассмотрим 2×2-матрицу с элементами A^{ij}. Мы покажем, что

$$\det(A) = \varepsilon_{ij} A^{1i} A^{2j}. \qquad (4.38)$$

Чтоб в этом убедиться, выпишем явно сумму в правой части:

$$\varepsilon_{ij} A^{1i} A^{2j} = \varepsilon_{12} A^{11} A^{22} + \varepsilon_{21} A^{12} A^{21};$$

мы воспользовались тем, что $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$. Кроме того, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$, и мы получаем

$$A^{11} A^{22} - A^{12} A^{21},$$

что по определению и есть определитель нашей матрицы. Следующее упражнение обобщает формулу на случай произвольной матрицы размера $n \times n$.

Упражнение 4.12. (a) Покажите, что определитель $n\times n$-матрицы с элементами A^{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ равен

$$\blacklozenge \quad \det(A) = \varepsilon_{ij\ldots k} A^{1i} A^{2j} \ldots A^{nk}. \qquad (4.39)$$

(Указание: определитель $n\times n$-матрицы выражается через $(n-1)\times(n-1)$ определители по правилу Лапласа. Используя это правило, докажите (4.39) по индукции, начиная с 2×2-случая.)

(b) Покажите, что

$$\det A = \frac{1}{n!} \varepsilon_{ab\ldots c} \varepsilon_{ij\ldots k} A^{ai} A^{bj} \ldots A^{ck}.$$

Упражнение 4.13. На многообразии с метрикой фиксируем какой-нибудь ортонормированный базис один-форм $\{\tilde{\omega}^i\}$ и определим *выделенную форму объёма* $\tilde{\omega}$ формулой

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2 \wedge \ldots \tilde{\omega}^n.$$

Покажите, что в произвольной системе координат $\{x^{k'}\}$

$$\blacklozenge \quad \tilde{\omega} = |g|^{1/2} \tilde{d}x^{1'} \wedge \tilde{d}x^{2'} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{n'}, \qquad (4.40)$$

где g — определитель матрицы, составленной из компонент $g_{i'j'}$ метрического тензора в этих координатах.

Снова интересно рассмотреть случай трёхмерного эвклидова пространства. Объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, равен определителю матрицы, строки которой составлены из компонент этих векторов. Следовательно, в силу (4.39):

$$\text{объём} = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k = a^i (\varepsilon_{ijk} b^j c^k)$$
$$= a^i (\bar{b} \times \bar{c})_i = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}),$$

ещё одно хорошо известное выражение для объёма.

4.13. МЕТРИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ ОБЪЁМА

В упр. 4.13 наличие метрики на многообразии позволило фиксировать некий ортонормированный базис $\{\tilde{\omega}^i\}$ и с его помощью сконструировать n-форму $\tilde{\omega}$ (см. (4.40)), которую мы назвали «выделенной формой объёма». Насколько эта форма оправдывает название «выделенная»? Однозначно ли она определена или зависит от выбора ортонормированного базиса (который, конечно, можно выбрать не единственным образом), использованного при её построении? Ответ таков: она определена однозначно с точностью до знака. Чтобы в этом убедиться, заметим, что компоненты $\tilde{\omega}$ в исходном базисе по определению равны $\varepsilon_{ij\ldots k}$. Если $\{\tilde{\omega}^{i'}\}$ — какой-то другой ортонормированный базис, то компоненты $\tilde{\omega}$ будут в нём равны $J\varepsilon_{i'j'\ldots k'}$, где J — якобиан преобразования от $\{\tilde{\omega}^i\}$ к $\{\tilde{\omega}^{i'}\}$. Но поскольку оба базиса ортонормированные, то $J = \pm 1$ (это будет доказано ниже). Таким образом, форма $\tilde{\omega}$ отличается от «выделенной» формы, задаваемой базисом $\{\tilde{\omega}^{i'}\}$, не более чем знаком. Если принять какое-либо соглашение об ориентации, то мы сможем определять $\tilde{\omega}$ только через правые ортонормированные базисы, и такое определение будет уже однозначным. Итак, метрика однозначно определяет форму объёма на ориентируемых многообразиях. С интуитивной точки зрения это, конечно, и не удивительно.

Чтобы прийти к этому результату, мы воспользовались тем, что якобиан преобразования от одного ортонормированного базиса к другому (а он есть не что иное, как определитель матрицы перехода $\Lambda^{i'}{}_j$) по модулю равен единице. Это нетрудно установить. Начнём с общего закона преобразования координат метрического тензора

$$g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'}\Lambda^l{}_{j'}g_{kl},$$

который можно записать в матричном виде так (см. § 2.29):

$$(g') = (\Lambda)^T (g) (\Lambda).$$

Взяв определитель от обеих частей закона преобразования, получаем

$$\det(g') = \det(g)\,[\det(\Lambda)]^2.$$

Но в ортонормированном базисе g_{ij} — это матрица, на диагонали которой стоят ± 1, а в остальных местах — нули. (Напомним, что если g_{ij} — *индефинитная* метрика, то не все диагональные элементы имеют одинаковый знак.) Следовательно, определитель матрицы g_{ij} равен ± 1 и имеет *один и тот же знак* во всех ортонормированных базисах. Таким образом, для нашего якобиана мы имеем

$$\det(\Lambda) = J = \pm 1.$$

В случае индефинитной метрики оператор дуализации * можно определить двумя разными способами; это связано с тем, что для n-вектора $\omega^{ij\dots k}$, обратного форме объёма, есть два «естественных» определения, отличающихся знаком. Раньше мы стояли на той точке зрения, что

$$\omega^{ij\dots k}\omega_{ij\dots k}=n!,$$

т. е.

$$\omega^{12\dots n}=(\omega_{12\dots n})^{-1}.$$

Но если имеется метрика, то можно определить n-вектор $\tilde{\omega}'$ и поднимая индексы у $\tilde{\omega}$:

$$(\tilde{\omega}')^{ij\dots k}=g^{il}g^{jm}\dots g^{kr}\omega_{lm\dots r},$$

Из (4.39) и (4.40) следует, что

$$(\tilde{\omega}')^{ij\dots k}=|g|^{1/2}\det(g^{lm})\varepsilon^{ij\dots k}.$$

Теперь, поскольку (g^{lm}) — матрица, обратная к g_{ij}, её определитель равен g^{-1}, и мы имеем

$$(\tilde{\omega}')^{12\dots n}=\frac{|g|^{1/2}}{g}, \tag{4.41}$$

тогда как раньше мы имели

$$(\tilde{\omega})^{12\dots n}=\frac{1}{(\tilde{\omega})_{12\dots n}}=\frac{1}{|g|^{1/2}}. \tag{4.42}$$

Если g отрицателен, то эти формулы отличаются знаком. В теории относительности, где g как раз отрицателен, принято использовать $\tilde{\omega}'$ в соотношениях дуальности. Это вводит дополнительный знак минус в формулы типа (4.27).

В. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФОРМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Где есть интегральное исчисление, должно быть и дифференциальное, и мы сейчас введём так называемое «внешнее дифференцирование», которое действует на формы и превращает их в формы же — их «внешние производные». Точный смысл утверждения, что внешнее дифференцирование обратно к интегрированию, содержится в доказываемой ниже теореме Стокса, обобщающей основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b df=f(b)-f(a). \tag{4.43}$$

Потом мы продвинемся дальше и продемонстрируем тесную связь между дифференциальными формами и уравнениями в частных производных.

4.14. ВНЕШНЯЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Мы хотим определить дифференциальный оператор на формах, который бы сохранял их свойства как форм и был обратным к операции интегрирования в смысле формулы (4.43). Заметим, что если M — одномерное многообразие, то оператор $\tilde{d}$, превращающий нуль-форму f в один-форму $\tilde{d}f$, конечно же, удовлетворяет (4.43). Итак, нам требуется расширить $\tilde{d}$ на формы старших степеней. По аналогии с оператором $\tilde{d}$ на нуль-формах он должен повышать степень формы. Таким образом, если $\tilde{\alpha}$ — p-форма, то $\widetilde{d\tilde{\alpha}}$ должна быть $(p+1)$-формой. Подходящий способ расширения $\tilde{d}$ заключается в следующем (ниже $\tilde{\alpha}$ — p-форма, а $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ — q-формы):

◆ (i) $\tilde{d}(\tilde{\beta}+\tilde{\gamma})=(\tilde{d}\tilde{\beta})+(\tilde{d}\tilde{\gamma})$,

◆ (ii) $\tilde{d}(\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta})=(\tilde{d}\tilde{\alpha})\wedge\tilde{\beta}+(-1)^p\,\tilde{\alpha}\wedge\tilde{d}\tilde{\beta}$,

◆ (iii) $\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{\alpha})=0$.

Свойство (ii) — это не что иное, как правило Лейбница, если отвлечься от множителя $(-1)^p$. Этот множитель возникает потому, что прежде чем подействовать оператором $\tilde{d}$ на $\tilde{\beta}$, его надо «пронести» через p-форму $\tilde{\alpha}$; это означает «перестановку» его с p один-формами, а каждая перестановка дает множитель -1. Это свойство гарантирует, что действие $\tilde{d}$ будет согласовано с законом (4.12). (Дифференцирование, удовлетворяющее условию (ii), называется *антидифференцированием.*) Свойство (iii) на первый взгляд несколько неожиданно, однако если посмотреть, что́ оно значит в случае, когда $\tilde{\alpha}$ есть просто функция f, то станет очевидной его «разумность». Один-форма $\tilde{d}f$ имеет компоненты $\partial f/\partial x^i$; компоненты второй производной должны быть линейными комбинациями $\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j$. Но чтобы образовать два-форму, эти вторые производные должны быть антисимметричны по i и j, в то время как $\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j$ симметричны (частные производные коммутируют); поэтому появление нуля совершенно естественно. Свойства (i)—(iii) вместе с определением действия $\tilde{d}$ на функции однозначно определяют $\tilde{d}$. (Довольно длинное доказательство этой теоремы можно найти, посмотрев любое стандартное руководство по дифференциальным формам.)

Упражнение 4.14. (а) Покажите, что

$$\tilde{d}(f\tilde{d}g)=\tilde{d}f\wedge\tilde{d}g. \tag{4.44}$$

(b) Используя (a), покажите, что если

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{p!} \alpha_{i \ldots j} \tilde{d}x^i \wedge \ldots \tilde{d}x^j$$

— запись p-формы $\tilde{\alpha}$ в каком-нибудь координатном базисе, то

$$\tilde{d}\tilde{\alpha} = \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^k} (\alpha_{i \ldots j}) \tilde{d}x^k \wedge \tilde{d}x^i \wedge \ldots \tilde{d}x^j$$

и, следовательно,

◆ $$(\tilde{d}\tilde{\alpha})_{ki \ldots j} = (p+1) \frac{\partial}{\partial x^{[k}} \alpha_{ij]} \qquad (4.45)$$

4.15. ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Начиная с этого момента мы будем перманентно пользоваться частными производными. Для них существуют удобные стандартные обозначения. А именно, для любой функции f на многообразии

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv f_{,i}. \qquad (4.46)$$

Заметим, что сама f может быть компонентой тензора, в этом случае запятая ставится после всех индексов:

◆ $$\frac{\partial V^i{}_j}{\partial x^k} \equiv V^i{}_{j,k}. \qquad (4.47)$$

Вторые производные дают дополнительный индекс после запятой, дополнительные же запятые не ставятся:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} = f_{,ik}. \qquad (4.48)$$

Чтобы определить порядок действия производных, индексы надо читать слева направо (для $\partial/\partial x^k$ правило *обратное*). Особо отметим, что частное дифференцирование компонент *не* есть тензорная операция в смысле определения § 2.27. То есть функции $\{V^i{}_{j,k}\}$ в общем случае не совпадают с функциями

$$\Lambda^i{}_{a'} \Lambda^{b'}{}_j \Lambda^{c'}{}_k V^{a'}{}_{b',c'},$$

полученными преобразованием частных производных, взятых в другой системе координат. (Вспомните обсуждение в § 3.4 вопросов, связанных с определением дифференцирования тензоров на многообразии.) Единственное исключение из этого правила — дифференцирование *скалярной* функции; как мы видели, $f_{,i}$ являются компонентами один-формы $\tilde{d}f$. (Здесь

стоит вспомнить указанное в § 2.28 различие между *скалярами* и *функциями*.) Пример использования наших новых обозначений даёт скобка Ли:

$$[\bar{U}, \bar{V}]^i = U^j V^i{}_{,j} - V^j U^i{}_{,j}.$$

Хотя каждое слагаемое в правой части само по себе тензора не образует, их сумма есть тензор. Аналогично частные производные в (4.45) входят в такой комбинации, что тоже преобразуются как тензор.

Упражнение 4.15. Покажите, что при произвольных преобразованиях координат $V^i{}_{,k}$ не преобразуются как тензор, а $[\bar{U}, \bar{V}]^i$ все-таки преобразуются как вектор.

Учитывая соглашение о том, что индексы производных пишутся после всех других индексов, можно переписать (4.45) в виде

$$(\tilde{d}\tilde{\alpha})_{i \ldots jk} = (-1)^p (p+1)\, \alpha_{[i \ldots j, k]}. \qquad (4.49)$$

4.16. ХОРОШО ЗНАКОМЫЕ ПРИМЕРЫ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В точности так же, как внешнее умножение «превращалось» в трёхмерном пространстве в векторное произведение, внешнее дифференцирование превращается в ротор. Рассмотрим вектор $\bar{a}$. Внешняя производная ассоциированной с ним один-формы есть

$$\begin{aligned}\tilde{d}\tilde{a} &= \tilde{d}(a_1 \tilde{d}x^1 + a_2 \tilde{d}x^2 + a_3 \tilde{d}x^3) \\ &= a_{1,j} \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^1 + a_{2,j} \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^2 + a_{3,j} \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^3.\end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^1 = 0$ и то же верно для индексов 2 и 3, то

$$\begin{aligned}\tilde{d}\tilde{a} = (a_{1,2} - a_{2,1})\, \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^1 + (a_{2,3} - a_{3,2})\, \tilde{d}x^3 \wedge \tilde{d}x^2 \\ + (a_{3,1} - a_{1,3})\, \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^3.\end{aligned}$$

Ясно, что ротор здесь содержится. Чтобы выделить его как вектор, возьмём дуальную величину:

$$\begin{aligned}{}^*\tilde{d}\tilde{a} &= (a_{1,2} - a_{2,1})\, {}^*(\tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^1) + \ldots \\ &= (a_{1,2} - a_{2,1})\, \varepsilon^{213} \frac{\partial}{\partial x^3} + \ldots \\ &= (a_{2,1} - a_{1,2}) \frac{\partial}{\partial x^3} + \ldots,\end{aligned}$$

т. е.

$${}^*\tilde{d}\tilde{a} = \bar{\nabla} \times \bar{a}. \qquad (4.50)$$

Итак, ротор в трёхмерном пространстве есть ${}^*\tilde{d}$.

Не только ротор, но и дивергенция возникает из внешнего дифференцирования. В этом случае соответствующий оператор будет d*. Возьмём вектор $\bar{a}$ и найдем дуальную ему форму:

$$^*(\bar{a}) = {}^*\left(a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + a^3 \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = a^1 \, {}^*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) + \ldots$$
$$= \frac{1}{2} a^1 \varepsilon_{1jk} \tilde{\mathrm{d}}x^j \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^k + \ldots = a^1 (\tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3) + \ldots .$$

Её внешняя производная равна

$$\tilde{\mathrm{d}}{}^*\bar{a} = a^1{}_{,j} \tilde{\mathrm{d}}x^j \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3 + \ldots$$
$$= a^1{}_{,1} \tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3 + \ldots$$
$$= (a^i{}_{,i}) \, \widetilde{\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3}. \tag{4.51}$$

(При переходе от первой строчки ко второй во внешнем произведении «выживает» только член с $j = 1$.) Таким образом, мы показали, что

$$\blacklozenge \quad \tilde{\mathrm{d}}{}^*\bar{a} = (\bar{\nabla} \cdot \bar{a}) \, \tilde{\omega}, \tag{4.52}$$

где $\tilde{\omega} = \tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3$ — эвклидов элемент объёма в декартовых координатах. В § 4.23 мы обобщим эту формулу для дивергенции на случай произвольных p-векторов на произвольных многообразиях.

Упражнение 4.16. Используя (4.50), (4.52) и свойство (iii) из § 4.14, покажите, что (в трёхмерном эвклидовом векторном анализе) дивергенция ротора и ротор градиента равны нулю.

4.17. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Внешнее дифференцирование, как и формы сами по себе, тесно связано с хорошо известными понятиями дифференциального исчисления. В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y). \tag{4.53}$$

Если считать, что (x, y) — координаты на многообразии, то её можно записать в виде

$$f_{,i} = a_i,$$

где $a_x = g$ и $a_y = h$. Это уравнение в свою очередь можно записать в бескоординатной форме

$$\tilde{\mathrm{d}}f = \tilde{a}, \tag{4.54}$$

где $\tilde{a}$ — один-форма с компонентами g и h. Предположим теперь, что f — решение этого уравнения. Тогда, действуя на обе части оператором $\tilde{d}$, мы получим

$$\tilde{d}(\tilde{d}f) = \tilde{d}\tilde{a}.$$

Но левая часть равна нулю в силу свойства (iii) из определения $\tilde{d}$, и мы видим, что *необходимое* условие существования решения — равенство

$$\tilde{d}\tilde{a} = 0.$$

В компонентах оно имеет вид

$$a_{[i,j]} = 0,$$

что на самом деле есть *одно* равенство (у нас два-форма на двумерном многообразии)

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \qquad (4.55)$$

Как и следовало ожидать, это — хорошо всем знакомое условие совместности системы. Таким образом, внешнее дифференциальное исчисление даёт нам геометрический вывод этого условия, и, как правило, такой способ вывода благодаря компактности обозначений простейший. То что условия совместности являются и *достаточными* условиями существования решения, гарантируется теоремой Фробениуса в том варианте, в котором она изложена в § 4.26.

4.18. ТОЧНЫЕ ФОРМЫ

По определению внешней производной $\tilde{d}$ из того, что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$, следует, что $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$. Естественно задать обратный вопрос: если $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$, то можно ли утверждать, что существует форма $\tilde{\beta}$, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$? Форма $\tilde{\alpha}$, для которой $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$, называется *замкнутой*; форма $\tilde{\alpha}$, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$, называется *точной*. Является ли замкнутая форма точной? Мы докажем в § 4.19, что ответ утвердительный в следующем смысле. Рассмотрим окрестность $\mathscr{D}$ точки P, в которой $\tilde{\alpha}$ определена всюду и в которой $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$. Тогда существуют достаточно малая окрестность точки P и всюду в ней определённая форма $\tilde{\beta}$, такие что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$. Конечно, $\tilde{\beta}$ определяется не однозначно: $\tilde{\beta} + \tilde{d}\tilde{\gamma}$ с произвольной формой $\tilde{\gamma}$ (нужной степени) тоже подходит.

То что замкнутая форма точна, мы можем утверждать только *локально*, глобально это имеет место вовсе не всегда.

Если дана произвольная область $\mathscr{D}$, в которой $\tilde{\alpha}$ всюду определена и замкнута, то может оказаться невозможным найти одну-единственную форму $\tilde{\beta}$, определённую всюду в $\mathscr{D}$, такую что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$.

Проиллюстрируем это примером в R^2. Рассмотрим кольцо, заключённое между кривыми $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ (рис. 4.7), и введём декартовы координаты x и y с началом координат P, лежащим внутри $\mathscr{C}_2$. Один-форма

$$\tilde{\alpha} = \frac{x\,\tilde{d}y - y\,\tilde{d}x}{x^2 + y^2}$$

определена всюду между кривыми и, как нетрудно убедиться, обладает свойством $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$. Существует ли функция f, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}f$? Если мы введём обычные полярные координаты r и θ, то, как легко видеть, $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\theta$, так что на первый взгляд ответ положителен. Однако дело не столь просто: θ не является однозначной непрерывной функцией во всей рассматриваемой области между кривыми $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$. Таким образом, хотя $\tilde{\alpha}$ корректно определена всюду в области, нет такой функции f, для которой всюду $\tilde{\alpha} = \tilde{d}f$. Локально ответ «да», но глобально — «нет». Вопрос снимается, если мы уберем $\mathscr{C}_2$ и будем рассматривать всю внутренность кривой $\mathscr{C}_1$, поскольку $\tilde{\alpha}$ в точке $x = y = 0$ не определена. Опять-таки, если мы рассмотрим область, изображенную на рис. 4.8, задача решается: в этом случае $\tilde{\alpha}$ определена всюду внутри $\mathscr{C}$ и функцию θ можно выбрать однозначной и непрерывной внутри $\mathscr{C}$. Итак, на этом простом примере мы обнаружили, что, хотя *локально* $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \tilde{d}f$, ответ на *глобальный* вопрос (определена ли f всюду) зависит от рассматриваемой области.

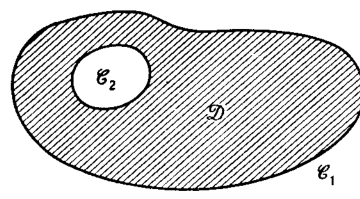


Рис. 4.7. Кольцевая область в R^2. Граничные кривые не входят в область.

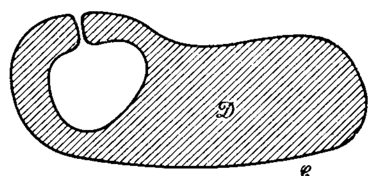


Рис. 4.8. Область в R^2, похожая на область на рис. 4.7, но имеющая границу, которая представляет собой единую связную кривую. Точку скачка θ (в которой θ "прыгает" от 2π до 0) на любом круге $r = \text{const}$ с центром в P можно вынести за пределы области $\mathscr{D}$.

Очевидно, что мы имеем дело с одним из аспектов топологии областей или многообразий. Изучением топологических свойств, которые определяют связь между замкнутыми и точными формами, занимается *теория когомологий.* После доказательства теоремы Стокса мы будем иметь достаточно

развитый математический аппарат, который позволит нам дать краткий экскурс в теорию когомологий в § 4.24.

4.19. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛОКАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ ЗАМКНУТЫХ ФОРМ

Мы докажем следующую теорему, известную, под названием *леммы Пуанкаре*. Пусть $\tilde{\alpha}$ — замкнутая p-форма, определённая всюду в области U многообразия M, и пусть существует гладкое 1-1-отображение U на открытый шар в R^n, т. е. на внутренность сферы S^{n-1}, задаваемой уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1$. Тогда в U существует $(p-1)$-форма $\tilde{\beta}$, для которой $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$.

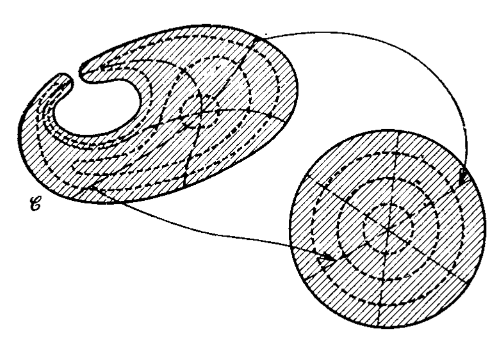


Рис. 4.9. Отображение области на рис. 4.8 на открытый единичный шар в R^2 (внутренность единичного круга). Пунктирные линии переходят в пунктирные, штриховые — в штриховые; показано несколько типичных точек. Если граничная кривая $\mathscr{C}$ — класса C^∞, то и это отображение можно выбрать класса C^∞.

Прежде чем перейти к доказательству, посмотрим, в чём смысл такого отображения. Очевидно, оно означает, что U может быть покрыто единой топологической декартовой системой координат. Это, действительно, — топологическое условие: для области, показанной на рис. 4.7, такой системы нет, а для области на рис. 4.8 — есть, как это показано на рис. 4.9. Такие отображения существуют и для многих других областей. Например, R^n само по себе можно отобразить на его единичный открытый шар по формуле

$$x^i \mapsto \frac{2}{\pi} x^i \frac{\operatorname{arctg} r}{r}, \tag{4.56}$$

$$r = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2]^{1/2}, \tag{4.57}$$

т. е. по формуле

$$r \mapsto \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} r. \tag{4.58}$$

Это — отображение класса C^∞ даже в начале координат, что можно увидеть, разложив $\operatorname{arctg} r$ в ряд Тэйлора:

$$\operatorname{arctg} r = r - \frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{5} r^5 + \ldots .$$

Доказательство теоремы состоит в том, что, используя координаты x^i на U, мы в явном виде построим искомую форму $\tilde{\beta}$. Пусть

$$\tilde{\alpha} = \alpha_{i \ldots k}(x^1, \ldots, x^n)\, \tilde{d}x^i \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^k, \tag{4.59}$$

где каждая компонента $\alpha_{i \ldots k}$ имеет p индексов. Свернём $\tilde{\alpha}$ с «радиус-вектором» $\bar{r}$, который в каждой точке имеет компоненты $(x^1, \ldots, x^n)$ относительно координатного базиса, и обозначим полученную $(p-1)$-форму через $\tilde{\mu}$. В силу (4.13) имеем

$$\tilde{\mu} = \tilde{\alpha}(\bar{r}) = \alpha_{ij \ldots k} x^i \tilde{d}x^j \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^k. \tag{4.60}$$

Теперь положим

$$\beta_{j \ldots k}(x^1, \ldots, x^n) = \int_0^1 t^{p-1} \alpha_{ij \ldots k}(tx^1, \ldots, tx^n)\, x^i\, dt. \tag{4.61}$$

Интегрирование здесь идет вдоль радиуса, на котором лежит точка $\{x^i\}$. Эти функции определяют $(p-1)$-форму $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\beta} = \beta_{j \ldots k} \tilde{d}x^j \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^k,$$

и мы утверждаем, что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$.

Доказательство этого утверждения сводится к простой алгебре. В силу (4.45)

$$(\tilde{d}\tilde{\beta})_{ij \ldots k} = p \frac{\partial}{\partial x^{[i}} \beta_{j \ldots k]} . \tag{4.62}$$

Производная легко берется:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \beta_{j \ldots k} = \int_0^1 t^{p-1} \alpha_{ij \ldots k}(tx^1, \ldots, tx^n)\, dt + \int_0^1 t^p x^l \alpha_{lj \ldots k,\, i}(tx^1, \ldots, tx^n)\, dt. \tag{4.63}$$

Чтоб это антисимметризовать, воспользуемся (впервые) замкнутостью $\tilde{\alpha}$:

$$0 = \alpha_{[lj \ldots k,\, i]} =$$

$$\alpha_{l[j \ldots k,\, i]} - \alpha_{[j|l| \ldots k,\, i]} - \alpha_{[kj \ldots |l|,\, i]} - \alpha_{[ij \ldots k],\, l}, \tag{4.64}$$

где вертикальные черточки отделяют индексы, не участвующие в антисимметризации, требуемой [ ]. Но компоненты $\tilde{\alpha}$ сами по себе антисимметричны по своим индексам, поэтому первые p членов равны между собой и мы заключаем, что

$$0 = p\alpha_{l\,[j\,\ldots\,k,\,i]} - \alpha_{[ij\,\ldots\,k],\,l}. \tag{4.65}$$

Подставляя это во второй интеграл антисимметризованной версии (4.63), а потом всё вместе в (4.62), получаем

$$\begin{aligned}(\tilde{d}\tilde{\beta})_{ij\,\ldots\,k} &= \int_0^1 [pt^{p-1}\alpha_{ij\,\ldots\,k}(tx^1, \ldots, tx^n) \\ &\quad + t^p x^p \alpha_{ij\,\ldots\,k,\,l}(tx^1, \ldots, tx^n)]\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t^p \alpha_{ij\,\ldots\,k}(tx^1, \ldots, tx^n)\right] dt \\ &= \alpha_{ij\,\ldots\,k}(x^1, \ldots, x^n).\end{aligned} \tag{4.66}$$

Это доказывает теорему.

Упражнение 4.17. Докажите равенства (4.64) и (4.65).

Упражнение 4.18. Используя теорему о локальной точности, покажите, что (в трёхмерном эвклидовом векторном анализе) векторное поле с нулевым ротором есть градиент, а векторное поле с нулевой дивергенцией есть ротор.

Тут надо сделать два замечания предостерегающего характера. Первое заключается в том, что, как отмечалось в § 4.18, построенная нами $(p-1)$-форма $\tilde{\beta}$ — не единственная форма, для которой $\tilde{d}\tilde{\beta} = \alpha$. Второе же состоит в том, что мы всего лишь нашли одно достаточное условие точности замкнутой формы. Теория когомологий открывает нам гораздо более сложные многообразия, на которых всякая замкнутая форма оказывается точной (см. § 4.24).

4.20. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ ОТ ФОРМ

Мы выведем следующее удобное выражение для производной Ли p-формы $\tilde{\omega}$ по направлению векторного поля $\bar{V}$:

$$\blacklozenge \quad \mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega} = \tilde{d}[\tilde{\omega}(\bar{V})] + (\tilde{d}\tilde{\omega})(\bar{V}). \tag{4.67}$$

Таким образом, p-форма $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ есть сумма двух p-форм: первая — это внешняя производная от $\tilde{\omega}(\bar{V})$ — свёртки $\tilde{\omega}$ и $\bar{V}$; вторая — это свёртка $\tilde{d}\tilde{\omega}$ с $\bar{V}$. Доказательство довольно длинное, и при первом чтении его можно опустить. Ответ (4.67) выглядит вполне естественно: $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ есть p-форма, зависящая

от $\bar{V}$ и $\tilde{\omega}$, и если вообще можно построить её с помощью $\tilde{d}$ (чего мы вправе ожидать, поскольку обе производные связаны лишь с дифференциальной структурой многообразия), то она должна выражаться через те две единственные p-формы, которые удаётся построить из $\bar{V}$, $\tilde{\omega}$ и $\tilde{d}$. Фактически она оказывается просто их суммой.

Доказательство проводится по индукции. Ради простоты записи не будем писать волны над буквами до конца параграфа.

Первая часть доказательства состоит в рассмотрении случая нуль-формы ω, т. е. функции f. Её свёртка с $\bar{V}$ есть *по определению* нуль, а внешняя производная есть df. Если $\bar{V} = d/d\lambda$, то, как мы знаем, $df(\bar{V}) = df/d\lambda$, но это же равно $\pounds_{\bar{V}} f = \bar{V}(f) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$, что и доказывает формулу в её простейшем случае.

Следующий рассматриваемый случай — один-форма ω. Запишем в компонентах:

$$\omega(\bar{V}) = \omega_i V^i \Rightarrow \mathrm{d}[\omega(\bar{V})] = (\omega_i V^i)_{,j}\,\mathrm{d}x^j,$$

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\omega_i\,\mathrm{d}x^i) = (\mathrm{d}\omega_i)\wedge \mathrm{d}x^i$$

$$= \omega_{i,j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = \omega_{i,j}(\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i - \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j)$$

$$\Rightarrow (\mathrm{d}\omega)(\bar{V}) = \omega_{i,j}[\mathrm{d}x^j(\bar{V})\,\mathrm{d}x^i - \mathrm{d}x^i(\bar{V})\,dx^j]$$

$$= \omega_{i,j}V^j\,\mathrm{d}x^i - \omega_{i,j}V^i\,\mathrm{d}x^j.$$

Вместе эти выражения дают

$$d[\omega(\bar{V})] + d\omega(\bar{V}) = [\omega_{i,j}V^j + \omega_j V^j{}_{,i}]\,dx^i,$$

что как раз и есть $\pounds_{\bar{V}}\omega$ в виде (3.14).

Доказательство завершается выполнением шага индукции по p. Поскольку произвольная p-форма может быть представлена в виде суммы функций, умноженных на внешнее произведение p один-форм:

$$\omega = \frac{1}{p!}\,\omega_{i\,\ldots\,k}\,\mathrm{d}x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^k,$$

то достаточно доказать теорему для случая форм, имеющих вид

$$\omega = fa \wedge b, \tag{4.68}$$

в предположении, что теорема имеет место для a и b. Тогда

$$\pounds_{\bar{V}}\omega = (\pounds_{\bar{V}} f)\,a \wedge b + f(\pounds_{\bar{V}} a)\wedge b + fa \wedge (\pounds_{\bar{V}} b)$$

$$= \mathrm{d}f(\bar{V})\,a \wedge b + f\{\mathrm{d}[a(\bar{V})] + (da)(\bar{V})\}\wedge b$$

$$+ fa \wedge \{d[b(\bar{V})] + (\mathrm{d}b)(\bar{V})\}.$$

Но кроме того мы знаем, что (если a — p-форма)

$$\mathrm{d}\,[\omega(\overline{V})] = \mathrm{d}\,[fa(\overline{V}) \wedge b + (-1)^p fa \wedge b(\overline{V})]$$
$$= \mathrm{d}f\,[(a \wedge b)(\overline{V})] + f\,\{\mathrm{d}\,[a(\overline{V})] \wedge b + (-1)^{p-1} a(\overline{V})$$
$$\wedge\, \mathrm{d}b + (-1)^p\, \mathrm{d}a \wedge b(\overline{V}) + a \wedge [\mathrm{d}b(\overline{V})]\}$$

и

$$(d\omega)(\overline{V}) = [df \wedge a \wedge b + f\,\mathrm{d}a \wedge b + (-1)^p fa \wedge \mathrm{d}b](\overline{V})$$
$$= df(\overline{V})\,a \wedge b - \mathrm{d}f \wedge [(a \wedge b)(\overline{V})] + f\,[\mathrm{d}a(\overline{V}) \wedge b$$
$$+ (-1)^{p+1}\,\mathrm{d}a \wedge b(\overline{V}) + (-1)^p\, a(\overline{V}) \wedge \mathrm{d}b + a \wedge \mathrm{d}b(\overline{V})].$$

Складывая эти два выражения, мы получаем формулу для $\mathcal{L}_{\overline{V}}\omega$, приведённую выше, что и доказывает правильность (4.67) для форм общего вида.

4.21. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ И ВНЕШНИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ КОММУТИРУЮТ

Важнейшее следствие формулы (4.67) состоит в том, что производные Ли и внешние производные коммутируют (см. (4.69) ниже). Чтоб доказать это, заметим, что для любой формы ω (мы опять опускаем волны)

$$\mathcal{L}_{\overline{V}}\, \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\,[(\mathrm{d}\omega)(\overline{V})],$$

поскольку $\mathrm{dd}\omega = 0$. С другой стороны, формулу для производной Ли можно переписать так:

$$(\mathrm{d}\omega)(\overline{V}) = \mathcal{L}_{\overline{V}}\omega - \mathrm{d}\,[\omega(\overline{V})].$$

Таким образом (опять потому, что $\mathrm{dd} = 0$), мы получаем

◆ $$\mathcal{L}_{\overline{V}}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\,(\mathcal{L}_{\overline{V}}\omega). \tag{4.69}$$

Производная Ли и внешняя производная коммутируют! На самом деле мы столкнулись здесь с частным проявлением фундаментального свойства оператора d (устанавливаемым в более полных курсах), которое заключается в том, что в некотором смысле d коммутирует с любым дифференцируемым отображением многообразия. (Это свойство коммутирования значительно упрощает доказательство предпоследнего утверждения упр. 3.9!)

4.22. ТЕОРЕМА СТОКСА

Теперь мы в состоянии показать, что внешнее дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Поскольку интегрирование на n-мерном многообразии опре-

делено только для n-форм, то речь может идти лишь о внешних производных $(n-1)$-форм Далее, поскольку мы ввели лишь *определенные* интегралы от n форм (т е интегралы, значение которых есть число, а не функция), то соотношение, обобщающее формулу (4 43), приведенную в начале части В этой главы, должно связать нам интеграл от n-формы $\tilde{d}\tilde{\omega}$ с другим интегралом — от формы $\tilde{\omega}$ Но $(n-1)$ форму $\tilde{\omega}$ можно проинтегрировать только по $(n-1)$-мерной гиперповерхности, следовательно, искомая формула должна связывать

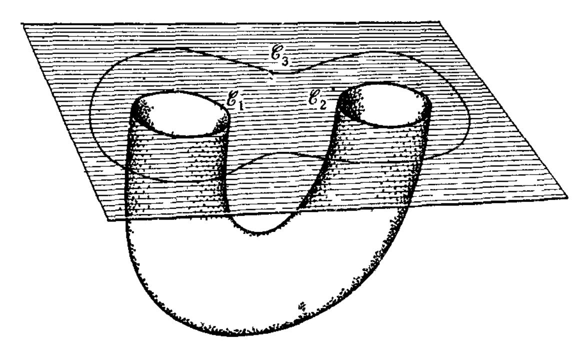


Рис 4 10 Многообразие с ручкой Ни кривая $\mathscr{C}_1$ ни кривая $\mathscr{C}_2$ не являются границами, поскольку они не делят M на две области („внутри" и „снаружи") Их объединение $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ есть граница, состоящая из двух не связанных между собой подмногообразий Кривая $\mathscr{C}_3$ — связная граница

интеграл от $d\tilde{\omega}$ по некоторой конечной области с интегралом от $\tilde{\omega}$ по *границе* этой области, которая $(n-1)$-мерна Мы подойдем к теореме Стокса (формула (4 75) ниже) несколько окольным путем, что позволит избежать длинных вычислений, встречающихся в стандартных доказательствах Сначала исследуем (с точностью до первого порядка), что происходит с интегралом при малой вариации области интегрирования

Итак, рассмотрим интеграл от n формы $\tilde{\omega}$ по области U n-мерного многообразия M Пусть U имеет гладкую ориентируемую границу, обозначим ее ∂U Под ориентируемой границей мы подразумеваем $(n-1)$-мерное ориентируемое подмногообразие в M, такое что $M \setminus \partial U$ распадается на два непересекающихся множества U и CU (дополнение U) таким образом, что любая кривая, соединяющая точки из U и CU, обязательно содержит точку из ∂U Для простоты будем считать ∂U связной, хотя это и не обязательно Примеры ориентируемых границ приведены на рис. 4 10 Пусть $\bar{\xi}$ — векторное поле на M Рассмотрим изменение области интегрирования, генерируемое *переносом Ли этой области* (*но не формы* $\tilde{\omega}$)

вдоль $\bar{\xi}$. В результате мы получим семейство областей $U(\varepsilon)$ и границ $\partial U(\varepsilon)$, зависящее от параметра сдвига ε, причем $U = U(0)$ и $\partial U = \partial U(0)$. Это изображено на рис. 4.11.

Изменение интеграла равно просто интегралу от $\tilde{\omega}$ по области $\delta U(\varepsilon)$, заключённой между границами:

$$\int_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} - \int_{U(0)} \tilde{\omega} = \int_{\delta U(\varepsilon)} \tilde{\omega}. \tag{4.70}$$

Вычислим его. Пусть V — кусок ∂U с системой координат $\{x^2, x^3, \ldots, x^n\}$. С помощью переноса Ли мы можем ввести

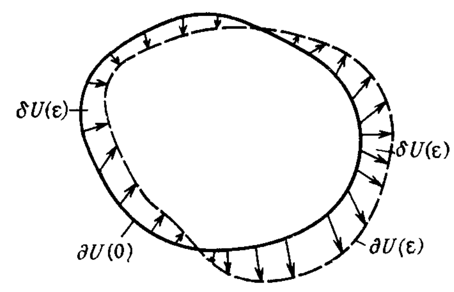


Рис. 4.11. Деформация области $U = U(0)$ в $U(\varepsilon)$ при сдвиге точек многообразия вдоль интегральных кривых поля $\bar{\xi}$ на параметрическое "расстояние" ε. Стрелки изображают векторы $\varepsilon\bar{\xi}$ (для малых ε). Область между ∂U и $\partial U(\varepsilon)$ — это $\delta U(\varepsilon)$.

координаты $\{x^1 = \varepsilon, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ в некоторой окрестности V, если поле $\bar{\xi}$ не является касательным к границе ∂U ни в

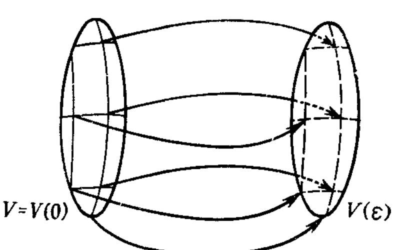


Рис. 4.12. Система координат в окрестности куска V границы ∂U, на котором $\bar{\xi}$ нигде не касается ∂U. Область $\delta V(\varepsilon)$ состоит из тех точек интегральных кривых поля $\bar{\xi}$, проходящих через V, которые удалены от V на параметрическое расстояние $\leqslant \varepsilon$.

одной её точке (см. рис. 4.12). Это задаёт координатную систему в области $\delta V(\varepsilon)$, заключённой между $\partial U(0)$ и $\partial U(\varepsilon)$ «над» $V = V(0)$. Сначала мы вычислим интеграл от $\tilde{\omega}$ по этой области, а потом распространим его на всю область $\delta U(\varepsilon)$.

В выбранных координатах

$$\tilde{\omega} = f(x^1, \ldots, x^n)\,\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n.$$

Если ε мало, то интеграл равен [1]

$$\begin{aligned}\int\limits_{\delta V(\varepsilon)} \tilde{\omega} &= \int\limits_{V(0)} \left[\int\limits_0^{\varepsilon} f\,\mathrm{d}x^1\right] \mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n \\ &= \varepsilon \int\limits_{V(0)} f(0, x^2, \ldots, x^n)\,\mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n + o(\varepsilon) \\ &= \varepsilon \int\limits_{V} \tilde{\omega}(\bar{\xi})\Big|_{\partial U} + o(\varepsilon). \qquad (4.71)\end{aligned}$$

Последняя строчка следует из (4.13) и того, что $\partial/\partial x^1 = \bar{\xi}$.

Равенство (4.71) не зависит от построенной системы координат, важно лишь, чтобы поле $\bar{\xi}$ не было касательным к ∂U на V. Таким образом, оно очевидно применимо к любой части ∂U, заключенной между точками, в которых $\bar{\xi}$ касательно к ∂U. Если эти точки образуют подмногообразие ∂U меньшей размерности (как на рис. 4.11), тогда вопросов не возникает: они как раз разделят ∂U на области $V_{(i)}$, в каждой из которых (4.71) выполняется. Если же точки касания $\bar{\xi}$ к ∂U образуют открытую область в ∂U, тогда перенос Ли просто отображает эту область в себя и вообще не меняет значения интеграла, следовательно, (4.71) опять-таки выполняется, так как обе части равны нулю. Итак, мы можем применить (4.71) ко всей границе ∂U, что даёт вместе с (4.70)

◆ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int\limits_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int\limits_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} - \int\limits_{U(0)} \tilde{\omega}\right] = \int\limits_{\partial U} \tilde{\omega}(\bar{\xi})\Big|_{\partial U}. \qquad (4.72)$$

Но для $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\varepsilon)\int \tilde{\omega}$ можно получить и другое выражение, следующее прямо из определения переноса Ли области по направлению $\bar{\xi}$. В каждой сдвинутой точке подынтегральное выражение отличается от исходного на $\varepsilon \mathcal{L}_{\bar{\xi}} \tilde{\omega} + o(\varepsilon)$, и, следовательно,

◆ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int\limits_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} = \int\limits_{U(0)} \mathcal{L}_{\bar{\xi}} \tilde{\omega}. \qquad (4.73)$$

Но в нашем случае формула (4.67) для $\mathcal{L}_{\bar{\xi}} \tilde{\omega}$ значительно упрощается, поскольку $d\tilde{\omega}$ есть $(n+1)$-форма и, значит, тож-

[1] Символ $o(\varepsilon)$ обозначает любую функцию $g(\varepsilon)$, такую что $g(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

дественно равна нулю:

$$\int_U \mathcal{L}_{\bar{\xi}} \tilde{\omega} = \int_U \tilde{d}\,[\tilde{\omega}(\bar{\xi})].$$

Сравнивая эту формулу с предыдущим выражением для $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\varepsilon)\int_U \tilde{\omega}$, мы получаем *теорему о дивергенции* (причина такого названия станет понятной в следующем параграфе):

$$\blacklozenge \quad \int_U \tilde{\mathrm{d}}\,[\tilde{\omega}(\bar{\xi})] = \int_{\partial U} \tilde{\omega}(\bar{\xi})\,\Big|_{\partial U}. \tag{4.74}$$

Поскольку $\tilde{\omega}$ и $\bar{\xi}$ произвольны, то $\tilde{\omega}(\bar{\xi})$ — произвольная $(n-1)$-форма, и мы можем переписать (4.74) в виде *теоремы Стокса* для произвольной $(n-1)$-формы $\tilde{\alpha}$, определённой на M:

$$\blacklozenge \quad \int_U \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha} = \int_{\partial U} \tilde{\alpha}, \tag{4.75}$$

где в правой части стоит, конечно же, ограничение $\tilde{\alpha}$ на ∂U.

То, что это та самая формула, которая называется в эвклидовом векторном исчислении формулой Стокса, легко увидеть, если взять M двумерным, как на рис. 4.11. Тогда $\tilde{\alpha}$ будет один-формой: $\tilde{\alpha} = \alpha_i \mathrm{d}x^i$ и $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha} = (\alpha_{i,\,j} - \alpha_{j,\,i})\,\tilde{\mathrm{d}}x^j \otimes \tilde{\mathrm{d}}x^i$. Ограничить $\tilde{\alpha}$ на ∂U — это значит рассматривать её значения лишь на касательных к ∂U векторах $\bar{l} = d/\mathrm{d}\lambda$. Поэтому мы получаем

$$\int (\alpha_{1,\,2} - \alpha_{2,\,1})\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 = \oint_{\partial U} \alpha_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \oint_{\partial U} \alpha_i\,\mathrm{d}x^i.$$

Но это и есть стандартная формула Стокса.

4.23. ТЕОРЕМА ГАУССА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ

В теореме Стокса содержится и то, что в векторном исчислении известно под именем теоремы Гаусса. Действительно, вернёмся к формуле (4.74) и рассмотрим координаты в некоторой области W многообразия M, в которых $\tilde{\omega} = \tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n$. Тогда её свёртка с $\bar{\xi}$ равна

$$\tilde{\omega}(\bar{\xi}) = \xi^1 \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n - \xi^2 \tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3 \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n \pm \ldots \tag{4.76}$$

и

$$\tilde{\mathrm{d}}\,[\tilde{\omega}(\bar{\xi})] = \xi^1{}_{,1}\,\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n + \xi^2{}_{,2}\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n + \ldots = \xi^i{}_{,i}\tilde{\omega}.$$

По аналогии с эвклидовой геометрией определим $\tilde{\omega}$-*дивергенцию* векторного поля $\bar{\xi}$ формулой

$$\blacklozenge \quad (\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\,\bar{\xi})\,\tilde{\omega} \equiv \tilde{\mathrm{d}}\,[\tilde{\omega}\,(\bar{\xi})]. \tag{4.77}$$

Если на области V, определённой в § 4.22, мы опять введем координаты, в которых ∂U есть поверхность постоянного x^1, то *ограничение* $\tilde{\omega}\,(\bar{\xi})$ на ∂U будет опять равно

$$\tilde{\omega}\,(\bar{\xi})\,|_{\partial U} = \xi^1 \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n = \tilde{\mathrm{d}}x^1\,(\bar{\xi})\,\tilde{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n.$$

Более общо, если $\tilde{n}$ — один-форма, нормальная к ∂U, т. е. $\tilde{n}\,(\bar{\eta}) = 0$ на любом касательном к ∂U векторе (η), и если $\tilde{\alpha}$ — произвольная $(n-1)$-форма, такая что

$$\tilde{\omega} = \tilde{n} \wedge \tilde{\alpha},$$

то мы получаем $\tilde{\omega}(\bar{\xi})\,|_{\partial U} = \tilde{n}\,(\bar{\xi})\,\tilde{\alpha}\,|_{\partial U}$. Это позволяет записать (4.74) в виде

$$\blacklozenge \quad \int\limits_U (\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\,\bar{\xi})\,\tilde{\omega} = \int\limits_{\partial U} \tilde{n}\,(\bar{\xi})\,\tilde{\alpha}, \tag{4.78}$$

где $\tilde{\alpha}$ ограничена на ∂U и $\tilde{n} \wedge \tilde{\alpha} = \tilde{\omega}$. Если всё U покрыто системой координат, в которой имеет место (4.76), то мы можем записать

$$\int\limits_U \xi^i{}_{,i}\,\mathrm{d}^n x = \oint\limits_{\partial U} \xi^i n_i\,\mathrm{d}^{n-1}x, \tag{4.79}$$

а это и есть стандартная запись теоремы Гаусса в R^n.

Упражнение 4.19. Покажите, что хотя сама форма $\tilde{\alpha}$ определяется формулой (4.78) неоднозначно, её ограничение $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ определено уже однозначно при фиксированной форме $\tilde{n}$. Покажите, далее, что $\tilde{n}$ единственна с точностью до преобразования изменения масштаба $\tilde{n} \mapsto f\tilde{n}$, где f — произвольная, нигде не обращающаяся в нуль функция, и, следовательно, $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ определено однозначно с точностью до преобразования $\tilde{\alpha}\,|_{\partial U} \mapsto f^{-1}\tilde{\alpha}\,|_{\partial U}$. Выведите отсюда, что ограничение $\tilde{n}\,(\bar{\xi})\,\tilde{\alpha}\,|_{\partial U}$ определено *однозначно*.

Произвол в определении дивергенции $\bar{\xi}$, связанный с выбором формы $\tilde{\omega}$, можно устранить, если имеется метрика, — мы можем использовать тогда в качестве $\tilde{\omega}$ метрический элемент объёма (§ 4.13). Он, правда, определён лишь с точностью до знака, но из (4.77) видно, что на самом деле $\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\,\bar{\xi}$ от этого знака не зависит. Из (4.79) следует, что стандартная дивергенция в R^n строится на основе формы $\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \ldots$

$\ldots \wedge \tilde{d}x^n$, являющейся элементом объёма в эвклидовой метрике.

Упражнение 4.20. С помощью (4.77) покажите, что если выбраны координаты, в которых $\tilde{\omega} = f\,\tilde{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n$, то

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \bar{\xi} = \frac{1}{f}(f\xi^i)_{,i}. \tag{4.80}$$

Упражнение 4.21. Рассмотрим в трёхмерном эвклидовом пространстве выделенную три-форму объёма $\tilde{\omega} = \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z$. Покажите, что в полярных координатах она имеет вид $\tilde{\omega} = r^2 \sin\theta \tilde{d}r \wedge \tilde{d}\theta \wedge \tilde{d}\varphi$. Используя (4.80), покажите, что дивергенция вектора $\bar{\xi} = \xi^r \partial/\partial r + \xi^\theta \partial/\partial\theta + \xi^\varphi \partial/\partial\varphi$ равна

$$\operatorname{div} \bar{\xi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\xi^r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\xi^\theta) + \frac{\partial\xi^\varphi}{\partial\varphi}.$$

Упражнение 4.22. В гидродинамике (и во многих других областях физики) используется уравнение неразрывности, которое на языке обычного тензорного исчисления записывается как

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{V}) = 0.$$

Здесь ρ — плотность массы (или другой сохраняющейся величины), а $\bar{V}$ — скорость потока. Определив $\tilde{\omega} = \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z$, как в упр. 4.21, и используя оператор *полной производной по времени* $\partial/\partial t + \pounds_{\bar{V}}$ (он подробно обсуждается ниже в гл. 5), покажите, что уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\bar{V}}\right)(\rho\tilde{\omega}) = 0.$$

Это позволяет смотреть на $\rho\tilde{\omega}$ как на динамически сохраняющуюся три-форму объёма в жидкости. «Объём», который она приписывает каждому элементу жидкости, есть его масса.

Упражнение 4.23. (a) С помощью (4.77) покажите, что дивергенция вектора $\bar{\xi}$ может быть записана как

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \bar{\xi} = {}^*d^*\bar{\xi}, \tag{4.81}$$

где * обозначает введённый ранее оператор дуализации относительно $\tilde{\omega}$.

(b) Для любого p-вектора $\mathbf{F}$ положим

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \mathbf{F} = (-1)^{n(p-1)*}d^*\mathbf{F}. \tag{4.82}$$

Покажите, что $\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \mathsf{F}$ есть $(p-1)$-вектор. Покажите, что если в некоторой системе координат $\tilde{\omega}$ имеет компоненты $\varepsilon_{i \ldots j}$, то

$$(\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \mathsf{F})^{i \ldots j} = \mathsf{F}^{ki \ldots j}{}_{,k} \tag{4.83}$$

в этой системе координат.

(c) Обобщите (4.80) на p-векторы.

Упражнение 4.24. (a) Используя теорему Стокса, докажите, что два-форма $\tilde{\omega}$ на сфере S^2 точна (т. е. является внешней производной другой формы) только тогда, когда

$$\int_{S^2} \tilde{\omega} = 0.$$

(Указание: S^2 не имеет границы.)

(b) Покажите, что интеграл от заданной в R^3 два-формы

$$\tilde{\omega} = x^1 \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3$$

по единичной сфере S^2 равен

$$\int_{S^2} \tilde{\omega} \Big|_{S^2} = \frac{4}{3}\pi.$$

(Указание: что такое $\tilde{d}\tilde{\omega}$ в R^3?) Поскольку любая два-форма на S^2 замкнута (почему?), это доказывает, что не всякая замкнутая форма на S^2 точна.

(c) Покажите, что любая замкнутая один-форма $\tilde{\beta}$ на S^2 точна. (Указание: проинтегрируйте $\tilde{d}\tilde{\beta}$ по части S^2.)

4.24. КРАТКИЙ ЭКСКУРС В ТЕОРИЮ КОГОМОЛОГИЙ

Приведённое выше упр. 4.24 показывает, как можно использовать теорему Стокса для изучения тех глобальных свойств многообразия, которые определяют соотношение между замкнутыми и точными формами. Обозначим через $Z^p(M)$ множество всех замкнутых p-форм на M (всех $\tilde{\alpha}$, таких что $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$) и через $B^p(M)$ множество всех точных p-форм на M (всех $\tilde{\alpha}$, таких, что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$). Оба эти множества являются векторными пространствами над полем вещественных чисел (например, если $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — замкнутые p-формы, то $a\tilde{\alpha} + b\tilde{\beta}$ тоже замкнута для любых вещественных чисел a и b). Кроме того, B^p — подпространство в Z^p, так как $\tilde{d}\tilde{d}\tilde{\beta} = 0$. Покажем, как можно разбить $Z^p(M)$ на классы эквивалентности относи-

тельно $B^p(M)$. Будем говорить, что две замкнутые формы $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$ эквивалентны ($\tilde{\alpha}_1 \approx \tilde{\alpha}_2$), если их разность есть элемент из $B^p(M)$:

$$\tilde{\alpha}_1 \approx \tilde{\alpha}_2 \Leftrightarrow \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2 = \tilde{d}\tilde{\beta}. \tag{4.84}$$

Класс эквивалентности $\tilde{\alpha}_1$ состоит из всех замкнутых форм, эквивалентных ей. Множество всех классов эквивалентности называется *p-мерной группой когомологий де Рама* многообразия M и обозначается $H^p(M)$.

Упражнение 4.25. (a) Отношение $\approx$ называется *отношением эквивалентности*, если оно удовлетворяет следующим условиям: (i) для любого $\tilde{\alpha}$ имеем $\tilde{\alpha} \approx \tilde{\alpha}$; (ii) если $\tilde{\alpha} \approx \tilde{\beta}$, то и $\tilde{\beta} \approx \tilde{\alpha}$; (iii) если $\tilde{\alpha} \approx \tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta} \approx \tilde{\gamma}$, то $\tilde{\alpha} \approx \tilde{\gamma}$. Покажите, что (4.84) определяет отношение эквивалентности.

(b) Если Z^p и B^p — *произвольные* векторное пространство и его подпространство соответственно, то множество определённых нами классов эквивалентности называется *факторпространством* пространства Z^p по B^p и обозначается Z^p/B^p. Покажите, что это — векторное пространство. (Прежде всего надо определить сложение классов эквивалентности. Докажите, а затем используйте следующее: если $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$ — элементы из классов эквивалентности A_1 и A_2 соответственно, то сумма двух любых элементов из A_1 и A_2 лежит в классе эквивалентности элемента $\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2$.)

(c) Рассмотрим векторное пространство R^2 и его подпространство $R^1{}_x$, состоящее из всех векторов вида $(a, 0)$ с произвольным вещественным a. Покажите, что $R^2/R^1{}_x$ есть конгруэнция прямых, параллельных оси x.

Теперь мы можем сформулировать результат § 4.19 в виде следующего утверждения: для любого открытого шара в n-мерном пространстве или даже для любой области U, диффеоморфной такому шару, $H^p(U) = 0$ при $p \geqslant 1$, поскольку все замкнутые p-формы эквивалентны друг другу и, следовательно, нулевой p-форме. Так же легко вычислить $H^0(U)$ или даже $H^0(M)$ для любого *связного* многообразия M. Нуль-форма — это просто функция, поэтому $Z^0(M)$ есть пространство всех функций f, таких что $\tilde{d}f = 0$, т. е. постоянных функций, оно по существу совпадает с R^1. Далее, поскольку (-1)-форм в природе не существует, то пространство $B^0(M)$ состоит из одной нулевой функции. Таким образом, отношение эквивалентности $\approx$ превращается в обычное алгебраическое равенство: константы f и g эквивалентны ($f \approx g$) тогда и только тогда, когда они равны ($f = g$). Следовательно, $H^0(M) = Z^0(M) = R^1$. В случае несвязного M функ-

ции из $Z^0(M)$ должны быть константами на каждой компоненте связности M, но значения этих констант не обязательно совпадают, и $H^0(M) = Z^0(M) = R^m$, где m — число компонент связности M.

Упражнение 4.24 легко обобщить на случай произвольной размерности и убедиться в том, что $H^n(S^n) \neq 0$ (пункт (b)) и $H^{n-1}(S^n) = 0$ (пункт (c)), а в целом картина такова:

$$H^n(S^n) = R^1$$
$$H^p(S^n) = 0, \quad 0 < p < n,$$
$$H^0(S^n) = R^1. \tag{4.85}$$

Доказательство этих формул, как и многие другие интересные результаты, можно найти в книге Спивака (1970, vol. 1). Среди множества приложений теории когомологий в этой книге есть *теорема о неподвижной точке*: для чётного n на сфере S^n не существует нигде не обращающегося в нуль векторного поля.

Упражнение 4.26. Для нечётного n постройте всюду отличное от нуля векторное поле на S^n. (Указание: Рассмотрите сферу S^{2m+1} как подмногообразие в R^{2m+2} и исследуйте, как действуют на ней вращения, отвечающие матрицам T из $SO(2m+2)$, имеющим следующий вид: $T = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1})$, где каждая из матриц A_j есть одна и та же 2×2-матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Покажите, что векторное поле $d/d\theta$, порождённое этой однопараметрической подгруппой, на сфере S^{2m+1} нигде не обращается в нуль.)

Упражнение 4.27. (a) Обобщая результат упр. 4.24(b), покажите, что $(n-1)$-форма в R^n

$$\tilde{\omega} = \varepsilon_{ij \ldots k} x^i \tilde{d}x^j \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^k, \tag{4.86}$$

суженная на S^{n-1}, не имеет нулей (сфера S^{n-1} определена уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1$).

(b) Покажите, что из того, что $H^{n-1}(S^{n-1}) = R^1$ [1], следует, что для любой $(n-1)$-формы $\tilde{\alpha}$ на S^{n-1} форма $\tilde{\alpha} - a\tilde{\omega}$, где $a = \int_{S^{n-1}} \tilde{\alpha} \Big/ \int_{S^{n-1}} \tilde{\omega}$, точна.

(c) Дуализуя это утверждение, покажите, что любую функцию f на S^{n-1} можно представить в виде $f = c + \mathrm{div}_{\tilde{\omega}} \overline{V}$,

[1] См. (4.85). — *Прим. ред.*

где c — некоторая константа, а $\bar{V}$ — векторное поле на S^{n-1}.

(d) Докажите, что $H^1(S^1) = R^1$, явно построив функцию f, для которой $\tilde{d}f = \tilde{\alpha} - a\tilde{\omega}$ (см. (b)).

Упражнение 4.28. (а) Предположим, что один-форма $\tilde{\alpha}$ на M такова, что $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} = 0$ для любой замкнутой кривой $\mathscr{C}$ в M. Покажите, что $\tilde{\alpha}$ точна, т. е. существует функция f, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}f$.

(b) Связное многообразие M называется *односвязным*, если любая замкнутая кривая на нём может быть непрерывно стянута в точку. Покажите, что M односвязно тогда и только тогда, когда $H^1(M) = 0$.

Прежде чем расстаться с теорией когомологий, сделаем два коротких замечания. Во-первых, *размерность* пространства $H^p(M)$ называется p-мерным *числом Бетти* многообразия M и обозначается через b^p. Во-вторых, хотя наше определение $H^p(M)$ основано на использовании дифференциальной структуры многообразия, одна из основных теорем теории когомологий (теорема де Рама) утверждает, что на самом деле группы когомологий определяются исключительно топологической структурой многообразия M, а от его дифференциальной структуры не зависит. Подробное обсуждение вопроса можно найти в книге Уорнера (1971).

4.25. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотренный в § 4.17 пример того, как внешнее дифференцирование связано с условием интегрируемости, показывает также, что по крайней мере для уравнений в частных производных первого порядка можно естественным образом трактовать эти уравнения как соотношения между формами. Это обстоятельство чрезвычайно важно, и мы сейчас остановимся на нём подробнее.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

представленное в виде

$$dy = f(x, y)\, dx. \tag{4.87}$$

Так и хочется записать его как уравнение для один-форм на двумерном многообразии M с координатами x и y

$$\tilde{d}y - f\tilde{d}x = 0, \tag{4.88}$$

где f теперь — функция на M. Каков смысл этого уравнения? Поскольку формы $\tilde{d}y$ и $\tilde{d}x$ на таком многообразии линейно-независимы, (4.88) на самом деле не может быть верным — оно не может быть тождеством. Но, с другой стороны, мы и не обязаны понимать его как тождество. Уравнение (4.87), из которого мы его получили, — это соотношение между «приращениями» dy и dx, выполняющееся *только на решении*. Решение же (4.87) имеет вид $y = g(x)$ и определяет в M кривую (или, во всяком случае, путь), т. е. одномерное подмногообразие в M. Коэффициент наклона векторов, касательных к этому подмногообразию, dy/dx, равен $f(x, y)$. Рассмотрим один такой вектор $\bar{V}$ в некоторой точке P, имеющий компоненты $(1, f(P))$. Для него $\tilde{d}y(\bar{V}) = f(P)$ и $\tilde{d}x(\bar{V}) = 1$. Таким образом, один-форма (4.88) обращается на этом векторе в нуль:

$$\blacklozenge \quad (\tilde{d}y - f\tilde{d}x)\,\bar{V} = 0.$$

В этом и состоит смысл (4.88): решения исходного дифференциального уравнения определяют подмногообразие в M, касательные векторы к которому *аннулируют* форму (4.88). Равенство (4.88) выполняется, когда оно ограничено на это подмногообразие. Верно и обратное: если существует подмногообразие, касательные векторы к которому аннулируют (4.88), то это подмногообразие даёт решение (4.87). Естественно, существует не одно такое подмногообразие, а целое семейство подмногообразий, отличающихся друг от друга, например, «начальным значением» решения в некоторой заданной точке $x = x_0$ (или постоянной интегрирования в решении (4.87)).

Эту картину легко обобщить. Любое заданное семейство форм (не обязательно один-форм) $\{\gamma_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ определяет в каждой точке P подпространство в T_P, аннулирующее эти формы. Решением (интегральным подмногообразием) для этих форм (или для соответствующего дифференциального уравнения) будет многообразие, «склеенное» из таких бесконечно-малых касательных подпространств. Вопрос о том, когда такая склейка возможна, прямо связан с теоремой Фробениуса, доказанной в гл. 3. В следующем параграфе мы переформулируем эту теорему на языке форм.

Однако первый вопрос, который приходит в голову физику, — это как вообще найти тот самый (или некоторый) набор форм, который соответствует данному набору дифференциальных уравнений? Для уравнений первого порядка пример того, как это делается, был дан в упр. 4.32. Более сложный пример доставляется уравнением второго порядка

для гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \tag{4.89}$$

Для удобства будем считать ω константой. Чтоб перевести это уравнение на язык форм, представим его в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x.$$

Теперь очевидно, что найти подмногообразие, аннулирующее формы

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{d}x - y\tilde{d}t, \quad \tilde{\beta} \equiv \tilde{d}y + \omega^2 x\tilde{d}t,$$

и решить (4.89) — это одно и то же. Многообразие, на котором определены наши формы, — трёхмерное, с координатами (x, y, t). Подмногообразие решений будет одномерным, поскольку требование обращения в нуль $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ налагает два условия на вектор в данной точке многообразия. Другие поучительные примеры можно найти в работах Estabrook (1976) и Harrison & Estabrook (1971), указанных в библиографии в конце главы, мы же переходим к вопросу *существования* решения таких уравнений.

4.26. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА НА ЯЗЫКЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Итак, мы возвращаемся к одной из важнейших теорем дифференциального исчисления на многообразиях, теореме, которую мы обсуждали в § 3.7, используя язык производных Ли. Чтобы переформулировать её в терминах дифференциальных форм, нам понадобятся некоторые определения. Набор форм $\{\tilde{\beta}_i\}$ (любой степени) определяет в каждой точке P подпространство X_P в T_P, состоящее из векторов, аннулирующих каждую из форм $\tilde{\beta}_i$. Оно называется *аннулятором* данного набора форм в точке P. *Полный идеал* набора в точке P состоит из всех форм в этой точке, ограничения которых на X_P равны нулю. (Заметим, что в P для *любой* формы $\tilde{\gamma}$ ограничение формы $\tilde{\gamma} \wedge \tilde{\beta}_i$ на аннулятор $\tilde{\beta}_i$ [1]) есть нуль и, следовательно, содержится в нашем полном идеале.) В любом полном идеале есть семейство линейно-независимых один-форм $\{\tilde{\alpha}_j\}$, которое его порождает в том смысле, что полные идеалы $\{\tilde{\alpha}_j\}$ и $\{\tilde{\beta}_j\}$ совпадают. В упр. 4.29 явно строится такое семейство образующих.

---

[1]) А тем более на X_P. — *Прим. ред.*

Упражнение 4.29. Пусть $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m\}$ — базис в X_P; дополним его произвольным образом векторами $\{\bar{e}_{m+1}, \ldots, \bar{e}_n\}$ до базиса в T_P. Покажите, что дуальный базис один-форм $\{\tilde{\omega}^{m+1}, \ldots, \tilde{\omega}^n\}$ порождает полный идеал. Покажите, что любая форма из этого идеала записывается в виде $\sum_{i=m+1} \tilde{\gamma}^i \wedge \tilde{\omega}^i$ с некоторыми $\{\tilde{\gamma}^i\}$.

Упражнение 4.30. Пусть $\{\tilde{\alpha}_j, j = 1, \ldots, m\}$ — набор линейно-независимых один-форм. Покажите, что форма $\tilde{\gamma}$ содержится в их полном идеале тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\gamma} \wedge \tilde{\alpha}_1 \wedge \tilde{\alpha}_2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\alpha}_m = 0. \tag{4.90}$$

Вся эта алгебра легко распространяется на поля форм. Полный идеал набора полей $\{\tilde{\beta}_i\}$ состоит из всех таких полей, что в каждой точке P их аннулирует X_P — аннулятор набора $\{\tilde{\beta}_{(i)}\}$ в этой точке. Идеал называется *дифференциальным идеалом*, если вместе с любой формой $\tilde{\gamma}$ в нём содержится и $\tilde{d}\tilde{\gamma}$. Набор один-форм $\{\tilde{\alpha}_i\}$ называется *замкнутым*, если все формы $\tilde{d}\tilde{\alpha}_i$ содержатся в полном идеале, порождённом этим набором.

Упражнение 4.31. (a) Покажите, что замкнутый набор один-форм порождает дифференциальный идеал.

(b) Покажите, что любой линейно-независимый набор из $n-1$ или из n один-форм на n-мерном многообразии замкнут.

Теперь мы можем сформулировать *теорему Фробениуса*: Пусть $\{\tilde{\alpha}_i, i = 1, \ldots, m\}$ — набор линейно-независимых полей один-форм в открытой области U n-мерного многообразия M. Этот набор замкнут тогда и только тогда, когда существуют функции $\{P_{ij}, Q_j, i, j = 1, \ldots, m\}$, такие что

$$\blacklozenge \quad \tilde{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}\tilde{d}Q_j. \tag{4.91}$$

Это утверждение будет доказано в следующем параграфе, а сейчас посмотрим, что оно означает. Напомним, что мы ищем решение системы дифференциальных уравнений $\{\tilde{\alpha}_i = 0\}$. Как видно из (4.91), она эквивалентна системе $\{\tilde{d}Q_j = 0\}$. Но последняя легко решается: $\{Q_j = \text{const}\}$. Итак, *функции* $\{Q_j\}$ *являются решениями системы* $\{\tilde{\alpha}_i = 0\}$. Каждый набор значений $\{Q_j\}$ задает m-мерное подмногообразие в M. Его касательные векторы по определению аннулируют $\{\tilde{d}Q_j\}$, а следовательно и $\{\tilde{\alpha}_i\}$. В этом и состоит связь с прежней версией теоремы Фробениуса. Требование, чтоб набор один-форм был замкнут, дуально к требованию, чтоб набор аннулирую-

щих их векторных полей составлял алгебру Ли. Ниже мы подробнее обсудим эту связь.

Формы $\{\tilde{\alpha}_i\}$, удовлетворяющие (4.91), можно было бы назвать «образующими поверхность» [1]. Теперь мы можем установить достаточность условия интегрируемости из § 4.17. В рассмотренном там случае многообразие имело размерность два, а многообразие решений — размерность один. Уравнение

$$\tilde{\alpha} = \tilde{d}f$$

имеет вид (4.91); следовательно, f существует тогда и только тогда, когда $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$. Разберем более сложный пример.

Упражнение 4.32. Рассмотрим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений для функций f и g, зависящих от переменных x и y:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + A_1 f + B_1 g = C_1, \\ &\frac{\partial f}{\partial y} + A_2 f + B_2 g = C_2, \\ &\frac{\partial g}{\partial x} + D_1 g + E_1 f = F_1, \\ &\frac{\partial g}{\partial y} + D_2 g + E_2 f = F_2, \end{aligned} \tag{4.92}$$

где A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i $(i = 1, 2)$ зависят от x и y. Мы хотим найти условия интегрируемости для этих уравнений.

(a) На четырехмерном многообразии M с координатами (x, y, f, g) введем один-формы

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha} = \tilde{d}f + f\tilde{A} + g\tilde{B} - \tilde{C}, \\ &\tilde{\beta} = \tilde{d}g + g\tilde{D} + f\tilde{E} - \tilde{F}, \end{aligned} \tag{4.93}$$

где один-форма $\tilde{A}$ определена равенством

$$\tilde{A} = A_1\tilde{d}x + A_2\tilde{d}y \tag{4.94}$$

и аналогично определены $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, ... *Покажите*, что решение системы (4.92) эквивалентно построению двумерного подмногообразия $\mathscr{H}$ в M, на котором $\tilde{\alpha}|_{\mathscr{H}} = \tilde{\beta}|_{\mathscr{H}} = 0$.

(b) Из теоремы Фробениуса следует, что если пара $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ замкнута, то существуют функции U, V, W, X, Y, Z четырёх переменных (x, y, f, g), такие что

$$\tilde{\alpha} = W\tilde{d}U + X\tilde{d}V,$$

$$\tilde{\beta} = Y\tilde{d}U + Z\tilde{d}V.$$

[1] В оригинале surface-forming. — *Прим. ред.*

Покажите, что

$$U(x, y, f, g) = \text{const},$$
$$V(x, y, f, g) = \text{const}$$

задают *решение* системы (4.92).

(c) Из (b) следует,что необходимое и достаточное условие существования решения — это принадлежность форм $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ и $\tilde{d}\tilde{\beta}$ к идеалу $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. *Покажите*, что последняя имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}\tilde{d}\tilde{A} + \tilde{B} \wedge \tilde{E} &= \tilde{d}\tilde{B} + \tilde{B} \wedge \tilde{D} + \tilde{A} \wedge \tilde{B} \\ &= \tilde{d}\tilde{C} + \tilde{B} \wedge \tilde{F} + \tilde{A} \wedge \tilde{C} \\ &= \tilde{d}\tilde{D} + \tilde{E} \wedge \tilde{B} = \tilde{d}\tilde{E} + \tilde{E} \wedge \tilde{A} + \tilde{D} \wedge \tilde{E} \\ &= \tilde{d}\tilde{F} + \tilde{E} \wedge \tilde{C} + \tilde{D} \wedge \tilde{F} = 0.\end{aligned}$$

(Указание: учет того факта, что вследствие (4.94) форма $\tilde{d}\tilde{A}$ пропорциональна $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y$, чрезвычайно упрощает вычисления.)

(d) *Покажите*, что условия пункта (c) приводят к следующим условиям интегрируемости для (4.92):

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} + B_2E_1 - B_1E_2 = 0,$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial x} + B_2D_1 + A_2B_1 - B_1D_2 - A_1B_2 = 0$$

и т. д.

Что следует из теоремы Фробениуса относительно существования решения уравнения (4.89)? Ответ простой: поскольку любые две линейно-независимые один-формы на трёхмерном многообразии автоматически имеют замкнутый идеал (см. упр. 4.31 (b)), то должны существовать функции f, g, h, l, m, n, такие что

$$\tilde{\alpha} = h\tilde{d}f + l\tilde{d}g,$$
$$\tilde{\beta} = m\tilde{d}f + n\tilde{d}g.$$

Тогда одномерные подмногообразия, задаваемые уравнениями $f = \text{const}$, $g = \text{const}$, аннулируют формы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ и, следовательно, являются многообразиями решений.

Рассмотренный нами вариант теоремы Фробениуса не применим непосредственно к системам дифференциальных уравнений, которые описываются наборами форм, включающими и формы старших степеней. В этом случае можно поступить, как в упр. 4.29, т. е. найти набор один-форм, порождающий

тот же полный идеал. Отнюдь не всегда эти один-формы будут алгебраически эквивалентны исходному набору, т. е. соответствующая им система дифференциальных уравнений может не быть эквивалентна исходной. Если такого не случилось, то можно прямо применять теорему Фробениуса, в противном случае нужны более тонкие методы. Обсуждение этого вопроса можно найти в книге Шоке-Брюа и др. (1977).

4.27. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ВАРИАНТОВ ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА

Напомним, как выглядит теорема в её геометрически более прозрачном варианте, описанном в гл. 3: данный набор векторных полей $\{\bar{V}_{(i)},\ i=1,\ \ldots,\ q\}$, образующий в каждой точке p-мерное векторное пространство, задает p-мерную гиперповерхность тогда и только тогда, когда всевозможные скобки Ли $[\bar{V}_{(i)},\ \bar{V}_{(j)}]$ $(i, j=1,\ \ldots,\ q)$ суть линейные комбинации этих q векторных полей. В этой главе мы сформулировали теорему на языке форм, в терминах замкнутости их внешних производных. Эта «картинка» «дуальна», дополнительна к картинке с векторами и условием замкнутости их скобок Ли. Центральным моментом при установлении соответствия между ними является следующее наблюдение: если указанные выше векторные поля определяют в некоторой точке P нашего n-мерного многообразия r-мерное подпространство в T_P, то они же естественным образом определяют $(n-r)$-мерное подпространство в T_P^* (пространстве один-форм в точке P), состоящее из форм, аннулируемых этими векторами. В точности так же набор q один-форм определяет $(n-q)$-мерное подпространство в T_P. Итак, мы видим, что подмногообразие можно описать, *либо* задав в каждой точке r-мерное подпространство касательных к нему векторов из T_P, *либо* задав $(n-r)$-мерное подпространство один-форм, которые этими векторами аннулируются.

Собственно доказательство эквивалентности двух вариантов теоремы Фробениуса проведем в два этапа.

(1) Рассмотрим подмногообразие размерности p в n-мерном многообразии; найдётся $n-p$ различных функций $Q_{(k)}$, которые (локально) задают наше подмногообразие с помощью $n-p$ уравнений $Q_{(k)}=\text{const}$. По предположению, формы $\tilde{d}Q_{(k)}$ линейно-независимы и аннулируются векторами $\bar{V}$, касательными к подмногообразию: $\langle \tilde{d}Q_{(k)}, \bar{V}\rangle=0$. С другой стороны, касательное пространство к подмногообразию есть p-мерное векторное пространство, определяющее $(n-p)$-мерное подпространство один-форм, состоящее из форм, аннулируемых касательными векторами $\bar{V}_{(i)}$: $\langle\tilde{\beta},\ \bar{V}_{(i)}\rangle=0$. Пусть $\{\tilde{\alpha}_{(k)},\ k=1,\ \ldots,\ n-p\}$ — некий базис в этом подпростран-

стве. Поскольку формы $\tilde{d}Q_{(k)}$ тоже образуют базис, то $\tilde{\alpha}_{(k)}$ можно представить в виде линейных комбинаций $\tilde{d}Q_{(k)}$, как в (4.91). Поэтому, чтоб доказать эквивалентность, мы должны теперь убедиться в том, что условие замкнутости относительно взятия скобок Ли, которому удовлетворяют векторные поля $\bar{V}_{(i)}$, эквивалентно условию замкнутости набора форм $\{\tilde{\alpha}_{(k)}\}$.

(2) С этой целью рассмотрим равенства

$$\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-p;\ j = 1, \ldots, p)$$

и возьмём от них производные Ли относительно всевозможных $\bar{V}_{(k)}$:

$$0 = \pounds_{\bar{V}_{(k)}}\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle = \langle\pounds_{\bar{V}_{(k)}}\tilde{\alpha}_{i}, \bar{V}_{(j)}\rangle + \langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \pounds_{\bar{V}_{(k)}}\bar{V}_{(j)}\rangle.$$

По правилу ли-дифференцирования форм имеем

$$\langle\pounds_{\bar{V}_{(k)}}\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle = \langle\tilde{d}\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(k)}\rangle, \bar{V}_{(j)}\rangle + \langle\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}), \bar{V}_{(j)}\rangle.$$

Первый член обращается в нуль, ибо $\tilde{\alpha}_i$ аннулируется вектором $\bar{V}_{(k)}$, второй же как раз и есть $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}, \bar{V}_{(j)})$ — значение $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}$ на двух векторах из исходного набора. Итак, если $\pounds_{\bar{V}_{(k)}}\bar{V}_{(j)}$ — линейная комбинация $\bar{V}_{(i)}$, то он аннулирует $\tilde{\alpha}_{(i)}$ и, следовательно, $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}$ тоже аннулируются векторами $\{\bar{V}_{(j)}\}$. Таким образом, $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}$ принадлежат нашему идеалу, и замкнутость в смысле скобок Ли влечёт за собой замкнутость набора форм. И обратно: легко видеть, что из замкнутости набора форм ($\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}, \bar{V}_{(j)}) = 0$) следует замкнутость в смысле скобок Ли.

4.28. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Формы дают нам чрезвычайно удобный способ получения законов сохранения для дифференциальных уравнений. Будем считать, что решение системы уравнений эквивалентно нахождению поверхности, аннулирующей некоторый набор форм $\{\tilde{\alpha}_i\}$. Предположим, что существует форма $\tilde{\gamma}$, являющаяся линейной комбинацией $\{\tilde{\alpha}_i\}$:

$$\tilde{\gamma} = A_1\tilde{\alpha}_1 + \ldots,$$

такая что

$$\tilde{d}\tilde{\gamma} = 0.$$

Тогда существует другая форма $\tilde{\sigma}$, такая что

$$\tilde{\gamma} = \tilde{d}\tilde{\sigma}$$

в некоторой области U поверхности решения (интегральной поверхности) H и, кроме того,

$$\tilde{\gamma}|_H = \tilde{d}\tilde{\sigma}|_H = 0. \tag{4.95}$$

Применяя теорему Стокса к интегралу от $\tilde{d}\tilde{\sigma}$ по области U, получаем

$$\int_U \tilde{d}\tilde{\sigma} = \oint_{\partial U} \tilde{\sigma}.$$

Но в силу (4.95) интеграл в левой части равен нулю, и мы заключаем, что

$$\oint_{\partial U} \tilde{\sigma}|_H = 0.$$

Это — некоторый интегральный закон сохранения, как мы продемонстрируем сейчас на примере гармонического осциллятора.

В этом случае интегральные поверхности, фигурирующие в (4.95), одномерны, следовательно, $\tilde{d}\tilde{\sigma}$ должна быть один-формой, а $\tilde{\sigma}$ соответственно — нуль-формой (функцией). Поскольку $\tilde{d}\tilde{\sigma}$ совпадает с $\tilde{\gamma}$, рассмотрим форму (обозначения те же, что и в § 4.25)

$$\tilde{\gamma} = \omega^2 \times \tilde{\alpha} + y\tilde{\beta}.$$

Легко проверить, что

$$\tilde{d}\tilde{\gamma} \equiv 0 \tag{4.96}$$

и что фактически

$$\tilde{\gamma} = \tilde{d}\left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right). \tag{4.97}$$

Тогда на интегральной кривой, для которой $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$ и, следовательно, $\tilde{\gamma} = 0$, мы имеем

$$\tilde{d}\left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) = 0,$$

$$0 = \int \tilde{d}\left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) = \left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right)\Big|_{p_1}^{p_2},$$

где p_1 и p_2 — концы отрезка интегральной кривой, по которому мы интегрировали. Итак, мы видим, что энергия $\frac{1}{2} \cdot y^2 + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 x^2$ сохраняется на интегральной кривой.

Читатель, интересующийся приложениями такого подхода к уравнениям, имеющим солитонные решения, может найти их в работе Estabrook & Wahlquist (1975), указанной в библиографии в конце главы.

Упражнение 4.33. Проверьте равенства (4.96) и (4.97).

4.29. ВЕКТОРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

Теперь мы подведём итог обсуждению сферических гармоник, начатому в § 3.18. В этом параграфе мы показали, что пространство конечномерного представления группы $SO(3)$ квадратично-интегрируемыми функциями на S^2, отвечающего числу l, имеет базис $\{Y_{l,m},\ m=-l, \ldots, l\}$. Как построить аналогичный базис в пространстве векторных полей на S^2? Введем в этом пространстве естественную норму с помощью метрического тензора g на S^2, который имеет в обычной сферической системе координат компоненты $\{g_{\theta\theta}=1,\ g_{\varphi\varphi}=\sin^2\theta,\ g_{\theta\varphi}=0\}$. Пусть $\tilde{\omega}$ — элемент объёма на S^2, индуцированный этой метрикой (§ 4.13) и пусть $L^2_{1,0}(S^2)$ — векторное пространство, состоящее из всех векторных полей $\bar{V}$ на S^2, имеющих конечную норму

$$\|\bar{V}\|^2=\int_{S^2}\mathrm{g}(\bar{V},\bar{V})\,\tilde{\omega}. \tag{4.98}$$

Мы хотим найти векторные поля из $L^2_{1,0}(S^2)$, являющиеся собственными функциями для $\bar{l}_z$ и L^2.

Воспользуемся тем, что, во-первых, g и соответственно $\tilde{\omega}$ инвариантны относительно $\bar{l}_z$ и L^2, а во-вторых, внешняя производная и производная Ли коммутируют. Из функции Y_{lm} мы построим один-форму $\tilde{d}Y_{lm}$, а из неё — вектор $\bar{\nabla}Y_{lm}$ с компонентами (индексы A и B пробегают значения 1 и 2)

$$(\bar{\nabla}Y_{lm})^A=g^{AB}(Y_{lm})_{,B}. \tag{4.99}$$

Очевидно, что этот вектор есть собственная функция для $\bar{l}_z$ и L^2:

$$\pounds_{\bar{l}_z}\bar{\nabla}Y_{lm}=\mathrm{i}\,m\bar{\nabla}Y_{lm}, \tag{4.100a}$$

$$L^2(\bar{\nabla}Y_{lm})=-l(l+1)\bar{\nabla}Y_{lm}. \tag{4.100b}$$

Но мы не можем обойтись *одним* типом векторных гармоник, поскольку интересующее нас векторное пространство двумерно. Однако на двумерном многообразии есть и другой способ построения вектора из один-формы — операция дуализации. Таким образом мы получаем вторую собственную функцию $*\tilde{d}Y_{lm}$.

Упражнение 4.34. Покажите, что $\bar{\nabla} Y_{lm}$ и $^*\tilde{d} Y_{lm}$ линейно-независимы в каждой точке.

Как следует из теоремы о полноте, приведённой в § 3.18, две системы векторных сферических гармоник

$$\bar{Y}^{+}_{lm} \equiv \bar{\nabla} Y_{lm}, \tag{4.101a}$$

$$\bar{Y}^{-}_{lm} \equiv {}^*\tilde{d} Y_{lm} \tag{4.101b}$$

образуют полную систему в пространстве векторных полей на двумерной сфере.

Можно пойти дальше и таким же способом построить сферические гармоники для тензоров второго ранга. Однако это потребовало бы привлечения ковариантных производных на сфере, с которыми мы пока что не знакомы (см. гл. 6). Интересующегося читателя отсылаем к работе Regge & Wheeler (1957), указанной в библиографии.

Отметим, что мы рассматривали скалярные и векторные сферические гармоники лишь *на сфере.* В приложениях обычно фигурируют бóльшие многообразия со сферической симметрией, для которых сферы являются подмногообразиями. В качестве простого примера рассмотрим трёхмерное евклидово пространство E^3. Функцию на E^3 можно разложить в ряд $\sum f_{lm}(r) \times Y_{lm}$, где вся зависимость от r сосредоточена в $\{f_{lm}\}$. Векторное поле $\bar{V}$ на E^3 можно расщепить на два поля:

$$\bar{V} = \bar{V}_{\perp} + \bar{V}_{\mathrm{T}},$$

где $\bar{V}_{\perp}$ перпендикулярно к сферам (параллельно $\bar{e}_r$), а $\bar{V}_{\mathrm{T}}$ касательно к ним. Если мы представим $\bar{V}_{\perp}$ в виде $v\bar{e}_r$, где v — некоторая функция, то при вращениях v преобразуется как скалярная функция на сфере, а $\bar{V}_{\mathrm{T}}$ преобразуется как векторное поле на сфере. Поэтому $\bar{V}_{\mathrm{T}}$ надо разлагать по векторным сферическим гармоникам, а v — по скалярным. (Многие авторы умножают скалярные гармоники на $\bar{e}_r$ и называют получившуюся систему третьим типом векторных сферических гармоник.) Мы будем использовать эти разложения при рассмотрении космологических моделей в части Е гл. 5.

Существуют и другие, эквивалентные определения векторных сферических гармоник, имеющие на первый взгляд мало общего с нашими. Например, их можно определить с помощью методов теории групп (см. Edmonds, 1957). Построенная здесь система удобна для работы с дифференциальными уравнениями, где естественно возникают использованные нами производные.

4 30. БИБЛИОГРАФИЯ

Точка зрения самого Э Картана на дифференциальные формы чрезвычайно ясно изложена в его книге Les Systèmes Differentials Exterieurs et Leurs Application Geométriques (Hermann, Paris, 1945) [имеется перевод Картан Э Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения — М Изд во Моск ун-та, 1962] Прекрасным введением в пред мет с множеством деталей, для которых у нас не нашлось места, и с многочисленными приложениями к физике и технике может служить книга H Flanders, Differential Forms with Applications to the Physical Sciences (Academic Press, New York, 1963) Свежее и современное обсуждение вопроса, не требующее большой математической подготовки, проведено в книге M Schreiber, Differential Forms a Heuristic Introduction (Springer, Berlin, 1977) Строгое и углубленное изложение теории форм можно найти в книге Y Choquet Bruhat, C DeWitt Morette & M Dillard Bleick Analysis, Manifolds, and Physics (North Holland, Amsterdam, 1977)

Обсуждение теоремы Стокса на неориентируемых многообразиях, затрагивающее вопрос о существовании магнитных монополей, см в статье R Sorkin J Phys A **10**, 717 (1977)

Подробное изложение теории когомологии можно найти в книгах M Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (Publish or Perish, Boston, 1970), vol 1 или F W Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups (Scott, Foresman, Glenview, III, 1971)

Полезность форм при исследовании структуры дифференциальных уравнений продемонстрирована в статьях F B Estabrook & H D Wahlquist, Prolongation structure of nonlinear evolution equations, J Math Phys **16**, 1 (1975) и The geometric approach to sets of ordinary differential equations and Hamiltonian dynamics, SIAM Review **17**, 201 (1975) См также B K Harrison & F B Estabrook Geometric approach to invariance groups and solitons of partial differential systems, J Math Phys **12**, 653 (1971) и F B Estabrook, Some old and new techniques for practical use of exterior differential forms, *in* Backlund Transformation ed R N Miura Lectures Notes in Math no 515 (Springer Verlag, Heidelberg, 1976)

Существует много определений векторных сферических гармоник Стандартное руководство по этой теме — A R Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechnics (Princeton University Press, 1957) По поводу распространения наших методов на тензоры см T Regge & J A Wheeler, Phys. Rev **108**, 1063 (1957) Другие определения тензорных сферических гармоник можно найти в статьях D A Akyeampong J Math Phys **20**, 505—8 (1979) и E T Newman & R Penrose, J Math Phys **7**, 863 (1966)

5. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. ТЕРМОДИНАМИКА

5.1. ПРОСТЫЕ СИСТЕМЫ

Сначала рассмотрим однокомпонентную систему (скажем, газ), для которой закон сохранения энергии имеет вид

$$\delta Q = P\mathrm{d}V + \mathrm{d}U, \tag{5.1}$$

где U — внутренняя энергия, а δQ — количество тепла, получаемое газом, когда он совершает работу $P\mathrm{d}V$ и изменяет свою энергию. Мы будем понимать это равенство (уравнение состояния) как соотношение между различными один-формами на двумерном многообразии с координатами (V, U), на котором определена функция $P(V, U)$. Итак, $\tilde{\mathrm{d}}V$ и $\tilde{\mathrm{d}}U$ будут у нас один-формами, а следовательно, и $\tilde{\delta}Q$ тоже. Но будет ли $\tilde{\delta}Q$ точной один-формой? То есть можно ли найти функцию $Q(V, U)$, такую что $\tilde{\delta}Q = \tilde{\mathrm{d}}Q$? Если бы это было так, то мы имели бы $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\delta}Q = 0$, что означало бы

$$0 = \tilde{\mathrm{d}}P \wedge \tilde{\mathrm{d}}V = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_U \tilde{\mathrm{d}}V + \left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)_V \tilde{\mathrm{d}}U\right] \wedge \tilde{\mathrm{d}}V$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)_V \tilde{\mathrm{d}}U \wedge \tilde{\mathrm{d}}V.$$

(Индексы у производных указывают, какая переменная при дифференцировании фиксирована.) Таким образом, нужная функция Q может существовать, только если $(\partial P/\partial U)_V$ всюду обращается в нуль, — довольно странный это был бы газ!

Поскольку $\tilde{\delta}Q$ — один-форма в двумерном пространстве, то её идеал автоматически *замкнут*, и из теоремы Фробениуса (§ 4.26) следует, что должны существовать функции $T(U, V)$ и $S(U, V)$, такие что $\tilde{\delta}Q = T\tilde{\mathrm{d}}S$. Таким образом, мы определили функции температуры и энтропии для однокомпонентной системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, просто как функции, фигурирующие в записи один-формы из левой части (5.1):

◆ $$T\tilde{\mathrm{d}}S = P\tilde{\mathrm{d}}V + \tilde{\mathrm{d}}U. \tag{5.2}$$

Важно понимать, что это — чисто математическое определение S и T, не имеющее никакого отношения ко второму за-

кону термодинамики, который мы немного погодя рассмотрим. Математические *тождества* такого рода для многокомпонентной жидкости уже не имеют места. (Мы увидим, что второй закон термодинамики эквивалентен требованию $\tilde{\delta}Q = T\,\tilde{\mathrm{d}}S$ для композитных систем. Поскольку это тождество не выполняется автоматически, то второй закон термодинамики является физическим законом: он налагает ограничения на возможную математическую природу физической системы.)

5.2. ТОЖДЕСТВА МАКСВЕЛЛА И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Взяв внешнюю производную от (5.2), мы получим

$$\tilde{\mathrm{d}}T \wedge \tilde{\mathrm{d}}S = \tilde{\mathrm{d}}P \wedge \tilde{\mathrm{d}}V. \tag{5.3}$$

Предположим, что мы записали $T = T(S,\ V)$, $P = P(S,\ V)$. Тогда (5.3) даёт (поскольку $\tilde{\mathrm{d}}S \wedge \tilde{\mathrm{d}}S \equiv 0$, $\tilde{\mathrm{d}}V \wedge \tilde{\mathrm{d}}V \equiv 0$)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \tilde{\mathrm{d}}V \wedge \tilde{\mathrm{d}}S = \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \tilde{\mathrm{d}}S \wedge \tilde{\mathrm{d}}V = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \tilde{\mathrm{d}}V \wedge \tilde{\mathrm{d}}S;$$

отсюда вытекает равенство

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \tag{5.4}$$

известное как одно из тождеств Максвелла. Аналогично, записав $S = S(T,\ V)$, $P = P(T,\ V)$, мы можем вывести ещё одно тождество Максвелла:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V. \tag{5.5}$$

Разделив обе части (5.2) на T и взяв внешнюю производную, получаем

$$\frac{1}{T}\tilde{\mathrm{d}}P \wedge \tilde{\mathrm{d}}V - \frac{P}{T^2}\tilde{\mathrm{d}}T \wedge \tilde{\mathrm{d}}V - \frac{1}{T^2}\tilde{\mathrm{d}}T \wedge \tilde{\mathrm{d}}U = 0.$$

Полагая $U = U(T,\ V)$, $P = P(T,\ V)$, имеем

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \tilde{\mathrm{d}}T \wedge \tilde{\mathrm{d}}V - \frac{P}{T^2}\tilde{\mathrm{d}}T \wedge \tilde{\mathrm{d}}V - \frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_T \tilde{\mathrm{d}}T \wedge \tilde{\mathrm{d}}V = 0,$$

или

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T. \tag{5.6}$$

Упражнение 5.1. Выведите тождество

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_T - P = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_T - \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_S, \tag{5.7}$$

умножив (5.2) на $1/P$ и продифференцировав.

Другое важное соотношение, которое легко получается с помощью форм, — это

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T = -1. \tag{5.8}$$

Соотношение такого вида верно для любой тройки из (P, V, U, T, S). Для доказательства запишем

$$T = T(P, S), \quad S = S(T, P), \quad P = P(T, S), \tag{5.9}$$

что допустимо в силу двумерности нашего многообразия. Тогда мы получаем последовательность тождеств

$$\begin{aligned} \tilde{d}T \wedge \tilde{d}S &= \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \tilde{d}P \wedge \tilde{d}S \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \tilde{d}P \wedge \tilde{d}T \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T \tilde{d}S \wedge \tilde{d}T, \end{aligned}$$

из которых и следует (5.8). Заметим, что весь вывод основан на возможности записать формулы (5.9), поэтому такое тождество в действительности верно для любых трёх функций на двумерном многообразии.

То, как просто мы вывели тождества Максвелла и (5.8) при помощи форм, указывает, насколько естественно введение их в термодинамику; один-формы $\tilde{d}P$, $\tilde{d}S$ и т. д. — это математически точная замена расплывчатых физических понятий бесконечно-малых dP, dS и т. д.

5.3. КОМПОЗИТНЫЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ; ТЕОРЕМА КАРАТЕОДОРИ

Теперь рассмотрим композитную (составную) термодинамическую систему, части которой могут обмениваться энергией друг с другом и с окружающим миром. Для неё закон сохранения энергии имеет вид (в случае системы из N частей)

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}Q &= P_1 \tilde{d}V_1 + \tilde{d}U_1 + P_2 \tilde{d}V_2 + \tilde{d}U_2 + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{N} (P_i \tilde{d}V_i + \tilde{d}U_i). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Мы будем смотреть на него как на соотношение между один-формами на $2N$-мерном многообразии с координатами $(V_i,$

U_i; $i = 1, \ldots, N$) и предположим, что каждое P_i может быть выражено как функция этих координат. Возникает вопрос, можно ли определить энтропию и температуру для системы в целом, т. е. существуют ли T и S, такие что

$$\blacklozenge \quad \tilde{\delta} Q = T \tilde{d} S. \tag{5.11}$$

Это равенство есть не что иное, как утверждение, что форма $\tilde{\delta} Q$ *интегрируема* (в смысле теоремы Фробениуса). И теорема Фробениуса говорит нам, что условием, необходимым и достаточным для того, чтоб это было верно, является равенство $\tilde{d}\tilde{\delta} Q \wedge \tilde{\delta} Q = 0$. Как легко видеть из (5.6), вообще говоря, это не так, и мы заключаем, что для *произвольной* взаимодействующей системы нет глобальных функций температуры или энтропии. Но положение может быть иным для *равновесной* системы, поскольку условия механического и термодинамического равновесия между составными частями ограничат задачу (как мы надеемся) на некоторое подмногообразие нашего $2N$-мерного многообразия. Впредь мы будем относить слово «многообразие» к этому *равновесному подмногообразию* и исследуем возможность интегрируемости на нём $\tilde{\delta} Q$, став на точку зрения *Каратеодори*.

Если $\tilde{\delta} Q$ интегрируема, то каждая точка многообразия принадлежит одному и только одному интегральному подмногообразию; эти подмногообразия суть поверхности $S = \text{const}$, причём они попарно не пересекаются. Таким образом, начав в некоторой точке и двигаясь по кривой с $\delta Q \equiv 0$, мы *не* можем достичь произвольной точки многообразия. Иными словами, если существует функция энтропии, то нельзя адиабатически получить произвольное равновесное состояние. Физически интересен вопрос: верно ли *обратное*, т. е. если мы знаем, что не каждое состояние достижимо по пути с $\delta Q = 0$, то можно ли утверждать, что $\tilde{\delta} Q$ интегрируема? Этот вопрос интересен потому, что второй закон термодинамики в одной из своих версий утверждает, что в замкнутой системе тепло не может передаваться от холодного тела к горячему, если в остальном система остаётся неизменной. Под замкнутой системой мы понимаем систему с $\delta Q = 0$, и, следовательно, второй закон говорит нам, что не всякое состояние можно достичь при $\delta Q = 0$. Итак, следует ли из второго закона существование функции энтропии? Теорема Каратеодори утверждает, что да.

Мы докажем следующее: если $\tilde{\delta} Q$ не интегрируема, то все точки, лежащие в окрестности некоторой начальной точки P, можно соединить с P кривыми, аннулирующими $\tilde{\delta} Q$ Поскольку $\tilde{\delta} Q$ не интегрируема, то из теоремы Фробениуса в ва-

рианте § 4.26 видно, что существует по крайней мере одна пара векторных полей $\bar{V}$ и $\bar{W}$, таких что $\tilde{\delta}Q(\bar{V}) = \tilde{\delta}Q(\bar{W}) = 0$ в окрестности любой точки P, но $\tilde{\delta}Q([\bar{V}, \bar{W}]) \neq 0$ в самой P. По-другому, один-форма $\tilde{\delta}Q$ определяет в любой точке P подпространство K_P касательного пространства T_P, состоящее из векторов, аннулирующих $\tilde{\delta}Q$. Неинтегрируемость $\tilde{\delta}Q$ означает, что эти векторные поля нигде не задают гиперповерхность: по крайней мере одна из их скобок Ли не принадлежит K_P (см. рис. 5.1). Поскольку условие аннуляции $\tilde{\delta}Q$ — это только одно уравнение, то K_P имеет размерность $n-1$ (где n — размерность равновесного многообразия). Теперь вспомните введённую в § 2.13 экспоненциальную запись разложения Тэйлора. Взяв любое векторное поле $\bar{U}$, принадлежащее K_P во всех точках P, и сдвинувшись вдоль него на «расстояние» ε от P, мы окажемся в точке с координатами $x^i = \exp(\varepsilon\bar{U})x^i|_P$, где $\bar{U}$— это оператор дифференцирования по параметру кривой, действующий на функцию x^i. Множество точек в малой окрестности P, которые достигаются таким образом, можно обозначить $\exp(\varepsilon K_P)$; это образ векторного пространства K_P в многообразии. Локально это множество есть $(n-1)$-мерная гиперповерхность. Теперь покажем, что, двигаясь по кривым определённых выше полей $\bar{V}$ и $\bar{W}$, можно попасть в точки, лежащие как «снизу», так и «сверху» этой «гиперповерхности», т. е. все точки вблизи P достижимы. А именно, пройдём следующим путем: сперва сдвинемся на «расстояние» ε вдоль $\bar{V}$, потом на ε вдоль $\bar{W}$, потом на $-\varepsilon$ вдоль $\bar{V}$ и наконец на $-\varepsilon$ вдоль $\bar{W}$. Это приведёт нас в точку (см. формулу (2.6))

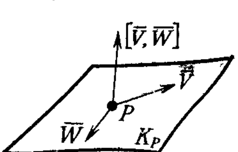


Рис. 5.1. Касательная гиперплоскость K_P содержит векторы, аннулирующие $\tilde{\delta}Q$, но не все их скобки Ли.

$$\begin{aligned} x^i &= e^{-\varepsilon\bar{W}} e^{-\varepsilon\bar{V}} e^{\varepsilon\bar{W}} e^{\varepsilon\bar{V}} x^i\big|_P \\ &= (1 + \varepsilon^2[\bar{W}, \bar{V}] + O(\varepsilon^3))\, x^i\big|_P. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Отсюда видно, что мы «почти что» вернулись в точку P, не дойдя до неё на ε^2 по направлению $[\bar{V}, \bar{W}]$. Эта точка не лежит в $\exp(\varepsilon K_P)$, поскольку K_P не содержит $[\bar{V}, \bar{W}]$. Она находится по какую-то сторону $\exp(\varepsilon K_P)$; чтоб попасть на другую, надо просто сначала двигаться по $\bar{W}$, а потом по $\bar{V}$. А раз наш путь был всё время вдоль $\bar{V}$ и $\bar{W}$, значит, он был адиабатическим: $\tilde{\delta}Q = 0$ всюду. Таким образом, ясно, что если $\tilde{\delta}Q$ неинтегрируема, то все состояния системы можно достичь адиабатически. Тем самым мы доказали, что из

второго закона термодинамики вытекает интегрируемость $\tilde{\delta}Q$ на равновесном многообразии и существование функции энтропии у композитных систем, находящихся в равновесии.

B. ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

5.4. ГАМИЛЬТОНОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Построение гамильтонова формализма начинается с функции Лагранжа $\mathscr{L}(q, q_{,t})$ динамической системы с координатой $q(t)$. Импульс определяется как

$$p = \partial\mathscr{L}/\partial(q_{,t}), \tag{5.13}$$

а функция Гамильтона — как

$$H = pq_{,t} - \mathscr{L} = H(p, q). \tag{5.14}$$

Лагранжево уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_{,t}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q} = 0 \tag{5.15}$$

вместе с определением p эквивалентно системе

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{dp}{dt}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{5.16}$$

Дадим теперь геометрическое истолкование гамильтоновых уравнений. определив многообразие M с координатами p и q, называемое «фазовым пространством». Определим на M два-форму

◆ $$\tilde{\omega} \equiv \tilde{\mathrm{d}}p \wedge \tilde{\mathrm{d}}q. \tag{5.17}$$

Рассмотрим на M кривую $\{q = f(t),\ p = g(t)\}$, являющуюся решением системы (5.16). Касательный вектор к этой кривой $\bar{U} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t = f_{,t}\partial/\partial q + g_{,t}\partial/\partial p$ обладает свойством

◆ $$\pounds_{\bar{U}}\tilde{\omega} = 0, \tag{5.18}$$

которое мы сейчас докажем. Поскольку $\tilde{d}\tilde{\omega} = 0$, то из (4.67) получаем

$$\pounds_{\bar{U}}\tilde{\omega} = \tilde{\mathrm{d}}[\tilde{\omega}(\bar{U})]. \tag{5.19}$$

Но так как $\tilde{\omega} = \tilde{\mathrm{d}}q \otimes \tilde{\mathrm{d}}p - \tilde{\mathrm{d}}p \otimes \tilde{\mathrm{d}}q$, то

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\bar{U}) &= \langle\tilde{\mathrm{d}}q, \bar{U}\rangle\tilde{\mathrm{d}}p - \langle\tilde{\mathrm{d}}p, \bar{U}\rangle\tilde{\mathrm{d}}q \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}\tilde{\mathrm{d}}p - \frac{dq}{dt}\tilde{\mathrm{d}}q.\end{aligned} \tag{5.20}$$

С другой стороны, поскольку f и g удовлетворяют (5.16), мы имеем

$$\tilde{\omega}(\bar{U}) = \frac{\partial H}{\partial p}\,\tilde{\mathrm{d}}\,p + \frac{\partial H}{\partial q}\,\tilde{\mathrm{d}}\,q = \tilde{\mathrm{d}}\,H. \tag{5.21}$$

Таким образом, $\mathrm{d}[\tilde{\omega}(\bar{U})]$ обращается в нуль и (5.18) доказано. Векторное поле $\bar{U}$, удовлетворяющее (5.18), называется *гамильтоновым векторным полем.*

Упражнение 5.2. (a) Докажите, что если $\bar{U}$ — гамильтоново векторное поле, то существует некоторая функция $H(p, q)$, такая что уравнения (5.16) выполнены на интегральных кривых поля $\bar{U}$.

(b) Докажите, что гамильтоновы векторные поля образуют алгебру Ли относительно операции коммутирования.

Упражнение 5.2(a) позволяет смотреть на гамильтоново поле $\bar{U}$ как на поле касательных к траекториям системы в фазовом пространстве. Заметим, что система *консервативна*, поскольку из (5.16) следует, что

$$\pounds_{\bar{U}}\, H \equiv \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{5.22}$$

5.5. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Координаты p и q задаются не однозначно. Определим *каноническое преобразование* как преобразование, сохраняющее вид $\tilde{\omega}$. Это значит, что новые координаты $P = P(q, p)$ и $Q = Q(q, p)$ будут каноническими, если

$$\tilde{\mathrm{d}}q \wedge \tilde{\mathrm{d}}p = \tilde{\mathrm{d}}Q \wedge \tilde{\mathrm{d}}P. \tag{5.23}$$

Необходимое и достаточное для этого условие:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right) = 1. \tag{5.24}$$

Пример канонического преобразования: $Q = p$, $P = -q$. Менее тривиальный пример строится, если следовать процедуре, использованной нами при выводе тождеств Максвелла в термодинамике. Запишем $p = p(q, Q)$, $P = P(q, Q)$; тогда из (5.23) находим

$$\partial p/\partial Q = -\partial P/\partial q. \tag{5.25}$$

Следовательно, если взять произвольную функцию $F(q, Q)$ и положить

$$p = \partial F/\partial q, \quad P = -\partial F/\partial Q,$$

то (5.25) будет выполняться тождественно. Поэтому мы говорим, что $F(q, Q)$ *генерирует* каноническое преобразование,

Поскольку за независимые переменные в (5.23) можно было бы взять не (q, Q), а любую из пар: (q, P), (p, Q) или (p, P), то соответственно есть четыре типа *производящих функций* канонических преобразований. Более полно этот вопрос исследован у Голдстейна (1975) (см. библиографию в конце главы).

5.6. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ И ОДИН-ФОРМАМИ, УСТАНАВЛИВАЕМОЕ ФОРМОЙ $\tilde{\omega}$

Один из наиболее важных моментов описанного геометрического подхода к гамильтоновой динамике состоит в том, что форма $\tilde{\omega}$ играет ту же роль, какую метрика играет на римановых многообразиях, — задаёт обратимое 1-1-соответствие между векторами и один-формами. Если $\bar{V}$ — векторное поле на M, то мы определяем поле один-форм $\tilde{V}$ формулой

$$\tilde{V} \equiv \tilde{\omega}(\bar{V}), \tag{5.26}$$

или

$$(\tilde{V})_i = \omega_{ij} V^j. \tag{5.27}$$

Аналогично по заданному полю один-форм $\tilde{\alpha}$ определяется (однозначно) векторное поле α:

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\omega}\,(\bar{\alpha}). \tag{5.28}$$

Упражнение 5.3. Докажите, что $\langle \tilde{V}, \bar{V} \rangle = 0$, так что $\tilde{\omega}$ не подходит в качестве обычной метрики.

Упражнение 5.4. Докажите, что если $\tilde{\alpha} = f\tilde{d}q + g\tilde{d}p$, то

$$\bar{\alpha} = g\frac{\partial}{\partial q} - f\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.29}$$

Упражнение 5.5. Докажите, что $\bar{X}$ — гамильтоново векторное поле на M тогда и только тогда, когда $\tilde{X}$ — точная один-форма, т. е. тогда и только тогда, когда существует функция H, такая что $\tilde{X} = \tilde{d}H$, или $\bar{X} = \overline{\mathrm{d}H}$.

5.7. СКОБКА ПУАССОНА

Предположим, что на многообразии заданы две функции f и g. Введём векторные поля $\bar{X}_f \equiv \overline{\mathrm{d}f}$ и $\bar{X}_g \equiv \overline{\mathrm{d}g}$ и рассмотрим скаляр

$$\{f, g\} \equiv \tilde{\omega}(\bar{X}_f, \bar{X}_g) = \langle \tilde{d}f, \bar{X}_g \rangle. \tag{5.30}$$

Поскольку $\tilde{\omega} = \tilde{d}q \otimes \tilde{d}p - \tilde{d}p \otimes \tilde{d}q$, мы имеем

$$\bar{X}_g = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{5.31}$$

в чём можно убедиться, проверив, что $\tilde{\omega}(\bar{X}_g) = \tilde{d}g$. Таким образом, мы получаем

$$\{f, g\} = \langle \tilde{d} f, \bar{X}_g \rangle = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Справа стоит то, что обычно называют *скобкой Пуассона* функций f и g. Определение (5.30) поясняет её геометрический смысл и показывает, что скобка Пуассона действительно не зависит от системы координат. Она зависит только от $\tilde{\omega}$.

Упражнение 5.6. (a) Положив $\bar{X}_H \equiv \overline{\tilde{d}H}$, покажите, что для любой функции K

$$\{K, H\} = \bar{X}_H(K) = dK/dt, \tag{5.32}$$

где t — параметр, такой что $\bar{X}_H = d/dt$. Итак, скобка Пуассона произвольной функции с функцией Гамильтона есть производная по времени от значений этой функции вдоль траектории системы. В частности, интегралы движения имеют нулевую скобку Пуассона с H.

(b) Покажите, что скобки Пуассона удовлетворяют тождеству Якоби:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{5.33}$$

для любых функций f, g, h класса C^2.

(c) Используя это, покажите, что

$$[\bar{X}_f, \bar{X}_g] = -\bar{X}_{\{f, g\}}, \tag{5.34}$$

так что гамильтоновы векторные поля образуют алгебру Ли.

5.8. МНОГОЧАСТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ; СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

На практике мы сталкиваемся с системами, имеющими более чем одну степень свободы, так что имеется не одна, а несколько пар p и q. У частицы в трёхмерном пространстве есть три q и три p, и фазовое пространство шестимерно. Система, содержащая N таких частиц, имеет $6N$-мерное фазовое пространство. Если мы рассмотрим систему общего вида с n степенями свободы, то фазовое пространство будет $2n$-мерным, и все предыдущие результаты останутся в силе, если в качестве два-формы $\tilde{\omega}$ мы возьмем (локально)

$$\tilde{\omega} = \sum_{A=1}^{n} \tilde{d} q_A \wedge \tilde{d} p_A. \tag{5.35}$$

Эта форма $\tilde{\omega}$ называется *симплектической формой*, а фазовое пространство с этой формой — *симплектическим многообразием*.

Упражнение 5.7. (a) Покажите, что f является интегралом движения, если функция Гамильтона H ли-инвариантна относительно поля $\bar{X}_f = \overline{\tilde{d}f}$:

$$\pounds_{\bar{X}_f} H = 0. \tag{5.36}$$

(См. упр. 5.6.)

(b) Определим форму объёма $\tilde{\sigma}$ в фазовом пространстве формулой

$$\tilde{\sigma} = \underbrace{\tilde{\omega} \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}}_{n \text{ раз}}, \tag{5.37}$$

где $2n$ — размерность фазового пространства. Покажите, что $\tilde{\sigma} \neq 0$ и что всякое гамильтоново векторное поле $\bar{U}$ имеет нулевую дивергенцию относительно этого элемента объёма. Иными словами, объём в фазовом пространстве сохраняется при эволюции системы во времени. Этот результат известен как *теорема Лиувилля*.

Упражнение 5.8. Сейчас мы докажем правильность сделанного в § 3.12 замечания относительно связи векторов Киллинга и сохраняющихся величин. Для движущейся частицы координаты фазового пространства суть $\{q^A, p_A\} = \{x^i, p_i = mv_i\}$, а функция Гамильтона равна $H = (1/2m)g^{ij}p_ip_j + \Phi(x^i)$. Докажите, что если $\bar{U}$ — вектор Киллинга и функция Φ постоянна вдоль $\bar{U}$, то «сопряжённый момент» вектора Киллинга $p_{\bar{U}} \equiv U^i p_i$ является сохраняющейся величиной. (Указание: Используя упр. 5.7, определите $\bar{X}_f$ как векторное поле в фазовом пространстве, у которого пространственные компоненты те же, что и у $\bar{U}$, а импульсные компоненты нулевые. Покажите, что

$$\pounds_{\bar{X}_f} H = 0,$$

и найдите f из формулы (5.31).)

5.9. ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ; СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ

Особенно просто и наглядно формулируются законы сохранения в случае линейных систем. Линейной называется динамическая система, функция Гамильтона которой имеет вид

$$H = \sum_{A,\,B=1}^{n} (T^{AB} p_A p_B + V_{AB} q^A q^B), \tag{5.38}$$

где T^{AB} и V_{AB} не зависят от p_A и q^A. Такая система называется линейной потому, что её уравнения движения линейны по $\{q^A, p_A\}$:

$$\frac{dp_A}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^A} = -\sum_B V_{AB}q^B, \tag{5.39}$$

$$\frac{dq^A}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_A} = \sum_B T^{AB}p_B. \tag{5.40}$$

Заметим, что можно считать $T^{AB} = T^{BA}$ и $V_{AB} = V_{BA}$, поскольку антисимметричная часть, скажем, T^{AB}, после свёртки с симметричным выражением $p_A p_B$ не даёт вклада в H.

Линейность системы гарантирует, что если $\{q^A_{(1)}, p_{(1)A}\}$ и $\{q^A_{(2)}, p_{(2)A}\}$ — решения, то и $\{\alpha q^A_{(1)} + \beta q^A_{(2)}, \alpha p_{(1)A} + \beta p_{(2)A}\}$ будет решением при любых α и β. Поэтому фазовое пространство — это не просто многообразие, оно обладает естественной структурой векторного пространства. Конечно же, векторное пространство — это частный случай многообразия, так как его можно отобразить в R^n, но это такое многообразие, которое может быть *отождествлено* с касательным пространством в любой его точке. А именно, поскольку кривая в векторном пространстве есть последовательность векторов, зависящая от параметра, а касательный вектор есть просто результат дифференцирования по этому параметру, то он тоже является элементом этого векторного пространства. Более того, *все* касательные пространства T_P естественно отождествляются друг с другом; мы можем говорить о равенстве векторов из разных T_P, просто сравнивая их компоненты. (Это значит, что векторное пространство является плоским многообразием, см. гл. 6.)

Поскольку точка фазового пространства является вектором, мы можем использовать симплектическую форму $\tilde{\omega}$ для определения скалярного произведения элементов фазового пространства. Если $\bar{Y}_{(1)}$ — вектор с компонентами $\{q^A_{(1)}, p_{(1)A}, A = 1, \ldots, N\}$, а $\bar{Y}_{(2)}$ имеет соответственно компоненты $\{q^A_{(2)}, p_{(2)A}\}$, то их *симплектическое скалярное произведение* (или *кососкалярное произведение*) определяется как

$$\tilde{\omega}(\bar{Y}_{(1)}, \bar{Y}_{(2)}) = \sum_A (q^A_{(1)}p_{(2)A} - q^A_{(2)}p_{(1)A}). \tag{5.41}$$

Если $\bar{Y}_{(1)}(t)$ и $\bar{Y}_{(2)}(t)$ — траектории системы, то их симплектическое скалярное произведение не зависит от времени. Чтоб это доказать, мы просто подставим уравнения движения в формулу для $d\tilde{\omega}(\bar{Y}_{(1)}, \bar{Y}_{(2)})/dt$ (по повторяющимся индексам

производится суммирование):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\tilde{\omega}\,(\overline{Y}_{(1)},\ \overline{Y}_{(2)}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(q^A_{(1)})\,p_{(2)\,A} + q^A_{(1)}\,\frac{d}{dt}\,p_{(2)\,A}\\ &- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(q^A_{(2)})\,p_{(1)\,A} - q^A_{(2)}\,\frac{d}{dt}\,p_{(1)\,A}\\ &= T^{AB}p_{(1)\,B}p_{(2)\,A} + V_{AB}q^A_{(1)}q^B_{(2)}\\ &- T^{AB}p_{(1)\,A}p_{(2)\,B} - V_{AB}q^A_{(2)}q^B_{(1)}.\end{aligned}$$

Из симметричности T^{AB} и V_{AB} следует, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\tilde{\omega}\,(\overline{Y}_{(1)},\ \overline{Y}_{(2)}) = 0, \tag{5.42}$$

если $\overline{Y}_{(1)}$ и $\overline{Y}_{(2)}$ — решения.

Симплектическое скалярное произведение позволяет довольно изящно определить некоторые из *сохраняющихся величин*, связанных с решениями. На первый взгляд это не кажется очевидным: хотя симплектическое скалярное произведение и сохраняется, но, умножив решение само на себя, мы получим тождественный нуль. Фокус заключается в том, что, воспользовавшись инвариантностью системы (т. е. инвариантностью T^{AB} и V_{AB}), мы можем получить из одного решения $\overline{Y}$ другое, тесно с ним связанное. Например, допустим, что T^{AB} и V_{AB} не зависят от времени. Тогда уравнения движения показывают, что если $\overline{Y}(t)$ — решение, то $\mathrm{d}\overline{Y}/\mathrm{d}t$ — тоже решение. И мы определяем каноническую энергию E_c решения $\overline{Y}$ как

$$\blacklozenge \qquad E_C(\overline{Y}) = \tilde{\omega}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{Y}}{dt},\ \overline{Y}\right). \tag{5.43}$$

Легко проверить, что $E_c(\overline{Y})$ есть в точности значение функции Гамильтона на решении $\overline{Y}$.

Так же легко получать и другие сохраняющиеся величины. Обычно бывает, что T^{AB} и V_{AB} зависят от координат $\{x^i\}$ многообразия, на котором задана динамическая система (эвклидово пространство для нерелятивистской динамики). Если, как в упр. 5.8, найдётся векторное поле $\overline{U}$, такое что

$$\pounds_{\overline{U}}T^{AB} = 0 = \pounds_{\overline{U}}V_{AB}, \tag{5.44}$$

то существуют связанные с $\overline{U}$ сохраняющиеся величины. (Вычисляя $\pounds_{\overline{U}}T^{AB}$, важно иметь в виду различие между индексами A, B, относящимися к координатам в фазовом пространстве, и тензорными свойствами T^{AB} на исходном многообразии. На нём величины T^{AB} могут быть скалярами или тензорами в зависимости от того, что́ представляют из себя q^A. Индексы A и B всего лишь *метки*, они вовсе не указывают на

то, что с T^{AB} надо обращаться как с тензором типа $\binom{2}{0}$ при вычислении производной Ли по направлению $\bar{U}$, поскольку $\bar{U}$ — это вектор в исходном многообразии, а не в фазовом пространстве.) Как и раньше, если $\bar{Y}$ — решение, то и $\pounds_{\bar{U}}\bar{Y}$ — решение. (Опять то же замечание: это производная в исходном многообразии, а не в фазовом пространстве.) Итак, определим канонический *$\bar{U}$-импульс* формулой

$$\blacklozenge \qquad P_{\bar{U}}(\bar{Y}) = \tilde{\omega}(\pounds_{\bar{U}}\bar{Y}, \bar{Y}). \tag{5.45}$$

Читатель может на простых примерах, вроде того что дан в упр. 5.8, убедиться[1], что обычные сохраняющиеся величины действительно так получаются.

Хотя наше обсуждение ограничивалось системами с конечным числом (N) степеней свободы, развитый формализм прямо обобщается на непрерывные системы, такие как системы, описываемые волновым уравнением. Знакомый с уравнением Клейна — Гордона читатель может узнать симплектическое скалярное произведение: интеграл от сохраняющейся плотности тока $\dot{\psi}^*\psi - \psi\dot{\psi}^*$ как раз и есть (с точностью до постоянных множителей) $\tilde{\omega}(\psi^*, \psi)$. Обсуждение канонических сохраняющихся величин для случая волн в жидкости с приложением к вопросам устойчивости можно найти в работе Friedman & Schutz (1978), указанной в библиографии в конце главы.

5.10. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И РАССЛОЕНИЯ

В § 5.4 мы определили фазовое пространство как многообразие с координатами p и q. Это определение таит в себе множество важных и интересных структур. Пусть динамическая система имеет N координат $\{q^i\}$, отвечающих её N степеням свободы. Они определяют многообразие M, называемое *конфигурационным пространством*, и эволюция динамической системы во времени описывается кривой $q^i(t)$ в M. Функция Лагранжа $\mathscr{L}$ зависит от q^i и $\mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t$ и, следовательно, является функцией на касательном расслоении TM. Покажем, что импульс

$$p_i = \partial\mathscr{L}/\partial(q^i_{,t}) \tag{5.46}$$

есть поле один-форм на M, т. е. сечение кокасательного расслоения T^*M. Мы покажем это, установив, как преобразуется импульс при замене координат. Введём на M новые координаты

$$Q^{i'} = Q^{i'}(q^i). \tag{5.47}$$

[1] Это далеко не просто. — *Прим. перев.*

Тогда новые импульсы будут равны

$$P_{j'} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q^{j'}_{,t}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^{(k)}_{,t}} \frac{\partial q^{(k)}_{,t}}{\partial Q^{j'}_{,t}}. \qquad (5.48)$$

Далее, как $q^k{}_{,t}$, так и $Q^{j'}{}_{,t}$, в каждой точке P являются элементами слоя над этой точкой, и при замене переменных (5.47) координаты в этом слое соответственно преобразуются. А именно, если $\bar{V}$ — вектор в P, то для его компонент мы имеем

$$V^{j'} = \Lambda^{j'}_k V^k, \quad V^k = \Lambda^k_{j'} V^{j'}.$$

С тем же успехом формула применима и к вектору скорости $q^k{}_{,t}$:

$$q^k_{,t} = \Lambda^k_{j'} Q^{j'}_{,t} \Rightarrow \frac{\partial q^k_{,t}}{\partial Q^{j'}_{,t}} = \Lambda^k_{j'}.$$

Подставив это соотношение в (5.48), получаем

$$P_{j'} = \Lambda^k_{j'} p_k, \qquad (5.49)$$

и, следовательно, импульс действительно является одинформой.

Итак, мы видим, что фазовое пространство с координатами $\{q^i, p_i\}$ есть не что иное, как *кокасательное расслоение* T^*M, а функция Гамильтона — функция на этом расслоении. Более того, симплектическая форма

$$\tilde{\omega} = \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}p_i$$

(суммирование подразумевается) не зависит от выбора координат на M. Пусть произведено преобразование

$$\begin{aligned} Q^{j'} &= Q^{j'}(q^i) \Rightarrow \tilde{d}Q^{j'} = \Lambda^{j'}_i \tilde{d}q^i, \\ P_{j'} &= \Lambda^k_{j'} p_k \Rightarrow \tilde{d}P_{j'} = \Lambda^k_{j',l} p_k \tilde{d}q^l + \Lambda^k_{j'} \tilde{d}p_k. \end{aligned} \qquad (5.50)$$

(Напомним, что оператор $\tilde{d}$ действует на T^*M, а не на M и что $\Lambda^k{}_{j'}$ — функции, зависящие лишь от координат M.) Тогда

$$\tilde{d}Q^{j'} \wedge \tilde{d}P_{j'} = \Lambda^{j'}_i \Lambda^k_{j',l} p_k \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}q^l + \Lambda^{j'}_i \Lambda^k_{j'} \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}p_k. \qquad (5.51)$$

В то же время

$$\Lambda^{j'}_i \Lambda^k_{j'} = \delta^k_i \Rightarrow \Lambda^{j'}_i \Lambda^k_{j',l} = -\Lambda^{j'}_{i,l} \Lambda^k_{j'},$$

и (5.51) принимает вид

$$\tilde{d}Q^{j'} \wedge \tilde{d}P_{j'} = -\Lambda^{j'}_{i,l} \Lambda^k_{j'} p_k \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}q^l + \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}p_i.$$

Первый член в правой части обращается в нуль, поскольку

$$\Lambda^{l'}_{i,\,l} = \frac{\partial^2 Q^{l'}}{\partial q^i \partial q^l}$$

симметрично по i и l, а свёртывается с антисимметричной формой $\tilde{\mathrm{d}} q^i \wedge \tilde{\mathrm{d}} q^l$. Таким образом, от выбора координат на M форма $\tilde{\omega}$ не зависит и является *естественной* структурой на кокасательном расслоении T^*M. Кроме того, T^*M всегда ориентируемо, поскольку форма объёма $\tilde{\sigma}$, определённая в упр. 5.7(b), нигде не обращается в нуль.

Очевидно, что хотя в нашем примере мы обращались с расслоенной структурой как с тривиальной (т. е. как с прямым произведением q- и p-пространств), можно рассматривать и нетривиальные многообразия M и расслоения T^*M, для которых все приведённые выше координатные формулы имеют смысл уже лишь локально. Даже в таком простом примере, как шарик, движущийся по поверхности сферы, мы имеем фазовое пространство с нетривиальной расслоенной структурой, как было отмечено в § 2.11.

C. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

5.11. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА НА ЯЗЫКЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Выпишем уравнения Максвелла в их традиционном виде в системе единиц с $c = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{J}, \tag{5.52a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0, \tag{5.52b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{5.52c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{5.52d}$$

При этом мы, конечно же, использовали операторы ротора и дивергенции в обычном трёхмерном плоском пространстве.

Теперь мы хотим показать, что эти уравнения можно записать, пользуясь лишь понятиями метрики и внешнего дифференцирования. Начнём с того, что перепишем уравнения в их релятивистски-инвариантном виде [1], введя *два-форму Фа-*

[1] Для читателя, который это не знал или забыл, напомним, что уравнения Максвелла правильно описывают распространение света, а специальная теория относительности как раз и была изобретена для объяснения некоторых свойств света; поэтому уравнения Максвелла *уже* релятивистские. Всё, что мы здесь делаем, — это придаём им подходящую форму.

радея $\tilde{F}$ с компонентами

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.53}$$

(Здесь, как и в § 2.31, греческие индексы пробегают t, x, y, z.)

Упражнение 5.9. Докажите, что при пространственных вращениях $F_{\mu\nu}$ преобразуются таким образом, что **E** и **B** преобразуются как трёхмерные векторы.

С помощью тензора Фарадея уравнениям Максвелла можно придать чрезвычайно простой вид. Например, четыре уравнения (5.52b, c) записываются как

$$F_{[\mu\nu,\gamma]} = 0 \Leftrightarrow \tilde{d}\tilde{F} = 0, \tag{5.54}$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию.

Упражнение 5.10. (a) Докажите, что в (5.54) содержится четыре линейно-независимых уравнения.

(b) Докажите эквивалентность уравнений (5.54) и (5.52b, c), воспользовавшись явным выражением (5.53) для компонент $\tilde{F}$.

Теперь перейдем к оставшимся уравнениям. Если мы введём метрику специальной теории относительности, имеющую в нашей системе координат следующие компоненты:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.55}$$

то мы можем определить антисимметричный тензор **F** типа $\binom{2}{0}$:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta},$$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.56}$$

Упражнение 5.11. Докажите формулу (5.56).

Теперь оставшиеся уравнения можно записать так:

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = 4\pi J^{\mu}, \qquad (5.57)$$

где мы ввели 4-вектор тока с компонентами $\{J^t = \rho,\ J^i = (\mathbf{J})^i$ для $i = x,\ y,\ z\}$.

Упражнение 5.12. Докажите, что четыре уравнения (5.57) — это то же самое, что (5.52a—d).

До сих пор мы были привязаны к лоренцевым координатам, поскольку, хотя (5.54) и не зависит от координат, (5.57) не представляет собой тензорного равенства, верного в любой системе координат (вспомните упр. 4.15). С другой стороны, в упр. 4.23 мы видели, как определить дивергенцию антисимметричного $\binom{2}{0}$-тензора, если у нас есть форма объёма. Поскольку у нас есть метрика и $\{\partial/\partial t,\ \partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z\}$ образуют в этой метрике ортонормированный базис, то выделенная форма объёма имеет вид

$$\tilde{\omega} = \tilde{d}t \wedge \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z.$$

Дальнейшие рассмотрения проведем в форме упражнения.

Упражнение 5.13. (a) Определим два-форму $^*\tilde{F}$ как свёртку

$$^*\tilde{F} \equiv \frac{1}{2}\,\tilde{\omega}(F), \qquad (5.58)$$

т. е.

$$(^*\tilde{F})_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\omega_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}.$$

Конечно же, это введённая в гл. 4 дуальная к F форма. Выразите компоненты $(^*\tilde{F})_{\mu\nu}$ через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

(b) Определите три-форму $^*\tilde{J}$ как свёртку

$$^*\tilde{J} \equiv \tilde{\omega}(\bar{J}) \qquad (5.59)$$

и покажите, что (5.57) эквивалентно

$$\tilde{d}(^*\tilde{F}) = 4\pi\, ^*\tilde{J}. \qquad (5.60)$$

Из упр. 4.23 следует, что это можно переписать так:

$$\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\mathsf{F} = 4\pi \bar{J}. \qquad (5.61)$$

Обратите внимание на то, как похоже выглядят две части уравнений Максвелла в нашей новой записи:

◆ $$\tilde{d}\tilde{F} = 0, \qquad (5.54)$$

◆ $$\tilde{d}\,^*\tilde{F} = 4\pi\, ^*\tilde{J}. \qquad (5.60)$$

Также заметьте, что теперь они представлены в бескоординатном виде и, следовательно, выглядят так же на *любом* многообразии с метрикой (метрика была нужна, чтоб получить $^*\tilde{F}$ из $\tilde{F}$). Сходство между (5.54) и (5.60) в уравнениях Максвелла довольно глубокое. В самом деле, действие операции * на $\tilde{F}$ сводится просто к взаимной замене **E** и **B** (см. упр. 5.13(a)), а $\tilde{J}$ — это плотность *электрического* тока. Если бы существовали магнитные монополи, то у нас было бы два тока $\tilde{J}_e$ и $\tilde{J}_m$ и уравнения Максвелла приняли бы симметричную форму

$$\tilde{d}\tilde{F} = 4\pi{}^*\tilde{J}_m, \quad \tilde{d}{}^*\tilde{F} = 4\pi{}^*\tilde{J}_e. \tag{5.62}$$

Упражнение 5.14. (a) Докажите (5.62).

(b) Докажите с помощью внешнего дифференцирования, что уравнение (5.60) гарантирует сохранение заряда, т. е. что

$$\operatorname{div}(\tilde{J}) = 0. \tag{5.63}$$

Упражнение 5.15. Установите теорему об изменении полного заряда, действуя следующим образом.

(a) Возьмите *произвольную* ориентированную трёхмерную гиперповерхность $\mathscr{H}$ и ограничьте на неё (5.60). Докажите, что операция ограничения коммутирует с внешним дифференцированием, т. е.

$$\tilde{d}\,[({}^*\tilde{F})|_{\mathscr{H}}] = (\tilde{d}\,{}^*\tilde{F})|_{\mathscr{H}}.$$

(b) Возьмите на $\mathscr{H}$ какую-нибудь область $\mathscr{D}$ с границей $\partial\mathscr{D}$. Проинтегрируйте ограничение (5.60) по $\mathscr{D}$ и, воспользовавшись теоремой Стокса, покажите, что (соответствующие ограничения подразумеваются)

$$\int\limits_{\mathscr{D}} {}^*\tilde{J} = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\partial\mathscr{D}} {}^*\tilde{F}.$$

(c) Докажите, что в случае, когда $\mathscr{H}$ — гиперповерхность $t = \text{const}$ в пространстве Минковского, а $\partial\mathscr{D}$ — сфера, полный заряд, заключённый в $\mathscr{D}$, получается как интеграл от нормальной компоненты электрического поля по $\partial\mathscr{D}$.

5.12. ЗАРЯД И ТОПОЛОГИЯ

Поскольку теперь мы можем говорить об уравнениях Максвелла на любом многообразии с метрикой, стоит упомянуть о двух попытках разрешить головоломный вопрос: «Что есть заряд?», при помощи такого ответа: «Заряд — это топология». Первое объяснение, принадлежащее Дж. Уилеру (1962),

чрезвычайно просто. Рассмотрим рис. 5 2, на котором изображена гиперповерхность $t = \text{const}$ некоего гипотетического пространства-времени. Сплошные линии на рисунке — это интегральные кривые поля **E** Никаких зарядов нигде нет, и эти интегральные кривые либо замкнуты (концы линий, «продетых» сквозь ручку, соединяются между отверстиями), либо бесконечны (концы линий остаются свободными). Посмотрим, что́ обнаружит экспериментатор, измеряющий **E** на сфере S,

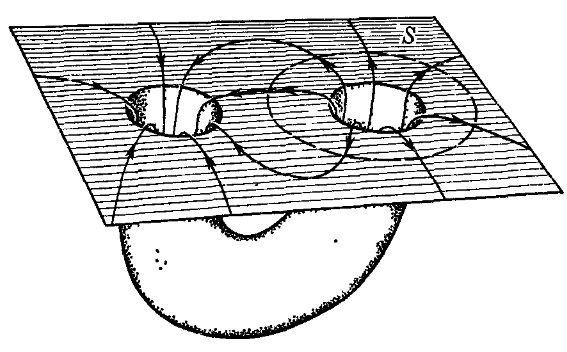


Рис 5 2 Червоточина', или 'ручка', прикрепленная к трехмерному многообразию (одна размерность на рисунке не представлена) Силовые линии могут пронизывать ручку, выходить наружу и вновь нырять в нее, в результате чего каждое отверстие выглядит заряженным, хотя зарядов в пространстве нет

окружающей одно из отверстий, интеграл $\int_S \tilde{F}|_S$, конечно же, в нуль не обратится (всюду на S поле направлено наружу), и он скажет, что отверстие имеет положительный заряд В точности так же сфера вокруг другого отверстия даст отрицательный заряд, равный по величине предыдущему (Вычисления упр 5 15 здесь силы не имеют, поскольку S не делит многообразие на внешность и внутренность, см рис 4.10) Итак, мы построили модель «заряда без заряда», получив заодно объяснение того, почему положительный и отрицательный заряды равны между собой У такой модели есть, однако, два изъяна во первых, никому пока не удалось получить решение, скажем, уравнений Эйнштейна с похожей геометрией пространства-времени, во-вторых, представление о том, что два заряда (которые могут быть чрезвычайно сильно удалены друг от друга) всегда соединены собственной специальной «ручкой», неудовлетворительно в философском плане.

Второе, более изощренное объяснение использует многообразие, сделанное неориентируемым при помощи специальной конструкции ручки. Оно принадлежит Соркину (1977) (см библиографию в конце гл. 4). В его модели оба отверстия имеют одинаковые по величине *и знаку* заряды, и можно

себе представить, что они близко сомкнуты и образуют нечто, выглядящее для внешнего наблюдателя как один заряд, равный удвоенному заряду каждого отверстия. Здесь упр. 5.15 опять не работает, поскольку многообразие неориентируемо. Такая модель свободна от второго изъяна модели Уилера — но не от первого! И ни одна из моделей не объясняет, почему два произвольных (не имеющих друг к другу отношения) заряда должны быть равны. Несмотря на это, приведённые примеры иллюстрируют становящуюся все более и более несомненной идею, что в теоретической физике есть и ещё что-то, кроме локальных дифференциальных уравнений!

5.13. ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛ

Существование «вектор-потенциала» для уравнений Максвелла прямо следует из (5.54). Поскольку $\tilde{F}$ — замкнутая два-форма, то существует один-форма $\tilde{A}$, такая что

$$◆ \quad \tilde{F} = d\tilde{A} \qquad (5.64)$$

в некоторой окрестности каждой точки. С помощью метрики этой один-форме можно сопоставить вектор, который и называется *вектор-потенциалом.* Более естественно, конечно же, пользоваться один-формой потенциала. Заметим, что $\tilde{A}$ определена не однозначно: $\tilde{A}' = \tilde{A} + \tilde{d}f$ при любой функции f даёт по формуле (5.64) то же самое $\tilde{F}$. Такая замена называется *калибровочным преобразованием.* Отметим также, что если существуют магнитные монополи, то $\tilde{d}\tilde{F}$ не может всюду обращаться в нуль. Как следует из нашего обсуждения точных форм в гл. 4, в этом случае $\tilde{A}$ можно определить лишь на простых областях, не содержащих магнитных монополей. В частности, в той области пространства-времени, где содержится мировая линия магнитного монополя, *нельзя* всюду согласованно определить один-форму потенциала.

Упражнение 5.16. (а) Покажите, что если существует один-форма потенциала $\tilde{A}$, то на нерелятивистском языке ей соответствуют скалярный потенциал φ и вектор-потенциал A^i (трёхмерный), задаваемые формулами $\varphi = A_0$, A^i (вектор-потенциал) $= -A_i$ (один-форма), где индексы относятся к той же системе координат, что и в (5.52).

(b) Выясните, как определённые в (а) потенциалы φ и A^i преобразуются при калибровочных преобразованиях.

(с) Чтобы проиллюстрировать сложности с один-формой потенциала, вызываемые наличием магнитных монополей, рассмотрим случай, когда заряды есть, а монополей *нет*, но один-форма потенциала $\tilde{\alpha}$ для $\tilde{F}$ определена равенством

$$^*\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{\alpha}.$$

(Вследствие дуальности магнитных и электрических полей относительно операции * присутствие электрического заряда влечёт для $\tilde{\alpha}$ те же сложности, что и присутствие магнитного для $\tilde{A}$.) Запишите уравнение Максвелла через $\tilde{\alpha}$ и покажите, что $\tilde{\alpha}$ существует лишь в тех областях, в которых нет заряда и которые могут быть стянуты в точку. Сделайте это, найдя $\tilde{\alpha}$ явно для случая одиночного статического изолированного заряда q.

5.14. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ: ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Как известно, плоские электромагнитные волны движутся со скоростью света. Рассмотрим специальный тензор Фарадея $F^{\alpha\beta}$, все компоненты которого зависят лишь от $u \equiv t - x$ (напомним, что мы используем систему единиц с $c = 1$):

$$F^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}(t - x) = A^{\alpha\beta}(u). \tag{5.65}$$

При каких условиях он удовлетворяет уравнениям для пустого пространства $\mathrm{d}\tilde{F} = 0$, $\mathrm{d}{}^*\tilde{F} = 0$? Из (5.65) следует, что

$$\tilde{\mathrm{d}}F = \tilde{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu}\tilde{\mathrm{d}}x^{\mu} \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^{\nu}\right) = \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{d}}(F_{\mu\nu})\,\tilde{\mathrm{d}}x^{\mu} \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^{\nu}$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{d}A_{\mu\nu}/\mathrm{d}u)\,\tilde{\mathrm{d}}u \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^{\mu} \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^{\nu}.$$

Из (5.53) легко вывести, что

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{F} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(B_z - E_y)\,\tilde{\mathrm{d}}t \wedge \tilde{\mathrm{d}}x \wedge \tilde{\mathrm{d}}y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(B_x)\,\tilde{\mathrm{d}}t \wedge \tilde{\mathrm{d}}y \wedge \tilde{\mathrm{d}}z\right.$$
$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(-B_x)\,\tilde{\mathrm{d}}x \wedge \tilde{\mathrm{d}}y \wedge \tilde{\mathrm{d}}z +$$
$$\left.+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(-B_y - E_z)\,\tilde{\mathrm{d}}t \wedge \tilde{\mathrm{d}}x \wedge \tilde{\mathrm{d}}z\right],$$

и если это обращается в нуль, то (пренебрегая статическим полем) мы получаем

$$B_z = E_y, \quad B_y = -E_z, \quad E_x = 0. \tag{5.66}$$

Упражнение 5.17. Покажите, что из уравнения $\tilde{d}{}^*\tilde{F} = 0$ следует, что

$$B_z = E_y, \quad B_y = -E_z, \quad E_x = 0. \tag{5.67}$$

Теперь мы видим, что электрическое и магнитное поля плоской электромагнитной волны поперечны (т. е. перпендикулярны направлению её распространения) и задаются двумя независимыми функциями $E_y(u)$ и $E_z(u)$, отвечающими двум независимым поляризациям волны.

D. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

5.15. РОЛЬ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИ

Под «идеальной» мы понимаем жидкость, не обладающую вязкостью и движущуюся адиабатически, т. е. без теплообмена. Хорошо известно, что такая жидкость подчиняется определённым локальным законам сохранения: каждый элемент жидкости в процессе своего движения сохраняет постоянную массу, энтропию и, в некотором смысле, интенсивность вихрей скорости. Эти законы сохранения обычно выводятся с помощью традиционного векторного анализа и могут показаться довольно сложными. С геометрической точки зрения наличие некоего потока немедленно наводит на мысль использовать производную Ли, и, действительно, мы сейчас продемонстрируем, как проясняются локальные законы сохранения, если работать с производными Ли.

5.16. ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПО ВРЕМЕНИ

Как мы видели в упр. 4.22, уравнение неразрывности, обычно записываемое в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\overline{V})=0,$$

можно представить в виде

$$◆\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\overline{V}}\right)(\rho\tilde{\omega})=0, \tag{5.68}$$

где $\tilde{\omega}=\tilde{d}x\wedge \tilde{d}y\wedge\tilde{d}z$ — три-форма объёма в эвклидовом пространстве. Оператор $(\partial/\partial t+\mathcal{L}_{\overline{V}})$ естественно считать оператором дифференцирования по времени, связанным с данным элементом жидкости. Чтобы это понять, представим себе не наше обычное пространство, а галилеево пространство-время — четырёхмерное многообразие с координатами (x, y, z, t) (см. § 2.10). Любая гиперповерхность $t=\text{const}$ есть эвклидово пространство. Движение элемента жидкости описывается кривой в пространстве-времени, называемой мировой линией этого элемента. На рис. 5.3 изображены две такие мировые линии (AA' и BB'). За бесконечно-малый промежуток времени dt точка на этой кривой перемещается из положения с координатами (x, y, z, t) в положение с координатами $(x+V^x dt,\ y+V^y dt,\ z+V^z dt,\ t+dt)$. Если обозначить через $\overline{U}$ вектор, касательный к мировой линии в четырёхмерном многообразии, то он, очевидно, будет иметь компоненты $(V^x, V^y, V^z, 1)$. Мы видим, что полная производная по времени, связанная с элементом жидкости, есть просто $\mathcal{L}_{\overline{U}}$ —

естественная производная вдоль мировой линии этого элемента.

Упражнение 5.18. Используя равенство (2.7), покажите, что

$$\mathcal{L}_{\bar{U}}\, \bar{W} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\bar{V}}\right) \bar{W}, \tag{5.69}$$

где $\bar{W}$ — любое векторное поле на гиперповерхности $t =$ const, т. е. любое чисто пространственное векторное поле ($W^t = 0$).

Равенство (5.69), очевидно, выполняется, и если мы заменим $\bar{W}$ *любым* чисто пространственным тензором типа $\binom{n}{0}$, т. е. тензором, «лежащим» в трёхмерном пространстве $t =$ const. Понятие чисто пространственного тензора выглядит

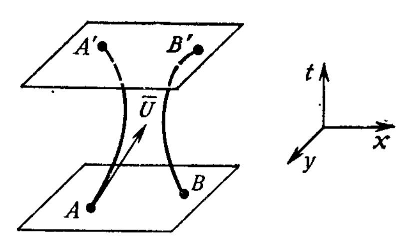


Рис. 5.3. Два момента галилеева времени и мировые линии AA' и BB' двух частиц. Вектор $\bar{U}$ касателен к кривой AA', параметризованной временем t.

неправомерным — оно неинвариантно относительно замены координат в четырёхмерном многообразии, поскольку «чистая пространственность» означает просто, что все t-компоненты тензора равны нулю. Но в нашем случае оно приемлемо, так как в нерелятивистской физике между пространством и временем проводится чёткая грань.

Упражнение 5.19. Наиболее общий вид преобразований координат, сохраняющих свою «естественность» по отношению к расслоенной структуре галилеева пространства-времени (§ 2.10), — это

$$t' = g(t); \qquad x^{i'} = f^{i'}(x^i, t), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5.70}$$

Покажите, что $\binom{n}{0}$-тензор **A**, не имеющий временны́х компонент $(\mathbf{A}(\ldots, \tilde{\omega}^t, \ldots) = 0)$, сохраняет это свойство при таких преобразованиях и $\binom{0}{n}$-тензор **B**, не имеющий пространственных компонент (т. е. лишь $B_{t\,\ldots\,t}$ не нуль), тоже остается чисто временны́м.

5.17. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Условие адиабатичности движения означает, что полная энтропия элемента жидкости должна сохраняться. Удобно работать с *удельной* энтропией S (энтропией на единицу массы). Очевидно, что при движении она должна оставаться *постоянной*:

$$◆ \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar{V}}\right)S=0. \tag{5.71}$$

Движение жидкости с давлением p, находящейся в гравитационном поле с потенциалом Φ, описывается уравнением Эйлера, которое в декартовой системе координат выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial t}V^i+V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V^i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}p+\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi=0. \tag{5.72}$$

Есть две причины, по которым это уравнение верно лишь в декартовых координатах. Во-первых, некоторые индексы i — верхние, а некоторые — нижние, а это безразлично лишь в ортонормированном базисе. Во-вторых, член $\partial V^i/\partial x^j$ преобразуется как $\binom{1}{1}$-тензор, *только* если матрица преобразования $\Lambda^{i'}_j$ не зависит от точки (упр. 4.5), что выполняется при переходе от одной декартовой системы к другой. Стандартный способ приспособить уравнение к произвольной системе координат заключается во введении ковариантной производной, которая определяется в главе, посвященной римановой геометрии. Здесь мы покажем, что имеется другой, и весьма поучительный, подход. Сначала заметим, что первые два слагаемых в (5.72) можно записать как

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V^j\frac{\partial V_i}{\partial x^j},$$

поскольку в декартовых координатах нет разницы между V^i и V_i. (Здесь мы, конечно же, воспользовались тем, что в трёхмерном пространстве есть метрический тензор.) Затем заменим производную $V^j\partial V_i/\partial x^j$ производной Ли (формула (3.14)) *один-формы* $\tilde{V}=\mathrm{g}(\bar{V},\ )$:

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{V})_i=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V_i+V_j\frac{\partial}{\partial x^i}V^j$$
$$=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V_i+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(V_jV^j),$$

где мы опять воспользовались равенством $V_j=V^j$. Итак, мы получаем

$$V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V_i=(\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{V})_i-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{2}V^2\right). \tag{5.73}$$

Оба слагаемых в правой части — это тензоры в произвольной системе координат! Таким образом, (5.72) приобретает бескоординатный вид

$$\blacklozenge \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar V}\right)\tilde V+\frac{1}{\rho}\,\tilde d p+\tilde d\left(\Phi-\frac{1}{2}V^2\right)=0. \qquad (5.74)$$

Роль метрики в этом выражении несколько завуалированна, но является решающей: она нужна, чтобы $\bar V$ превратить в $\tilde V$ и получить отсюда $\bar V^2=\tilde V(V)$.

5.18. СОХРАНЕНИЕ ВИХРЕЙ

Теперь мы можем заняться вопросом о сохранении вихрей. В обычных обозначениях вихрь — это ротор скорости $\nabla\times\bar V$. Как мы видели в гл. 4, это по существу внешняя производная $\tilde d\tilde V$. Раз внешняя производная и производная Ли коммутируют (конечно, $\tilde d$ и $\partial/\partial t$ тоже коммутируют, поскольку в $\tilde d$ входят только пространственные производные), то мы получаем из (5.74)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar V}\right)dV=\frac{1}{\rho^2}\,d\rho\wedge dp. \qquad (5.75)$$

(Для простоты записи мы опустили волны.) Здесь имеются два случая. Рассмотрим сначала более простой, когда жидкость подчиняется уравнению состояния $p=p(\rho)$. Тогда $dp\wedge d\rho\equiv 0$, и мы находим, что два-форма вихря dV удовлетворяет локальному (или конвективному) закону сохранения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar V}\right)dV=0. \qquad (5.76)$$

Это *теорема Гельмгольца о циркуляции*, представленная в её наиболее естественном виде. Однако, если имеется более общее уравнение состояния $p=p(\rho,\ S)$, ответ будет иной. В этом случае в нуль обращается не сама правая часть (5.75), а её внешнее произведение с dS:

$$dS\wedge d\rho\wedge dp=0. \qquad (5.77)$$

Упражнение 5.20. Докажите (5.77).

Внешнее дифференцирование (5.71) даёт

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar V}\right)dS=0, \qquad (5.78)$$

а умножив (5.75) внешне на dS, мы получаем

$$dS\wedge\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar V}\right)dV=0.$$

Таким образом,

◆ $$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar{V}}\right)\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}V=0. \tag{5.79}$$

Это наиболее общий закон сохранения вихрей. Он называется *теоремой Эртеля.*

Смысл три-формы $\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}V$ непосредственно не очевиден, но можно превратить (5.79) в закон сохранения для скаляра. Дело в том, что у нас есть и другая сохраняющаяся три-форма: $\rho\omega$, а в трёхмерном пространстве любые две три-формы пропорциональны. Значит, найдётся скалярная функция α, такая что

$$\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}V=\alpha\rho\omega, \tag{5.80}$$

и из (5.68) и (5.79) получится скалярное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar{V}}\right)\alpha=0.$$

Можно показать, что в общепринятых векторных обозначениях

$$\alpha=\frac{1}{\rho}\nabla S\cdot\nabla\times V. \tag{5.81}$$

Упражнение 5.21. Докажите (5.81). (Указание: выразите обе части (5.80) через $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.)

В обозначениях гл. 4

$$\alpha=\frac{1}{\rho}\varepsilon^{ijk}S_{,i}V_{k,j}. \tag{5.82}$$

Таким образом, α *дуальна* к $\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}V$ относительно $\rho\omega$, и сохранение α естественно следует из сохранения $\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}V$: то что $\rho\omega$ сохраняется, означает, что операция дуализации относительно $\rho\omega$ — это тоже сохраняющаяся, т. е. коммутирующая с оператором $(\partial/\partial t+\mathcal{L}_{\bar{V}})$, операция.

Упражнение 5.22. В декартовых координатах сдвиг поля скоростей определяется формулой

$$\sigma_{ij}=V_{i,j}+V_{j,i}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\theta, \tag{5.83}$$

где θ — дивергенция поля скоростей:

$$\theta=\nabla\cdot\bar{V}. \tag{5.84}$$

Покажите, что в произвольной системе координат

$$\theta=\frac{1}{2}g^{ij}\mathcal{L}_{\bar{V}}g_{ij}, \tag{5.85}$$

$$\sigma_{ij}=\mathcal{L}_{\bar{V}}g_{ij}-\frac{1}{3}\theta g_{ij}. \tag{5.86}$$

Е. КОСМОЛОГИЯ

5.19. КОСМОЛОГИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Большинство физиков знает, что общая теория относительности Эйнштейна дала современной физике последовательный и плодотворный подход, в рамках которого можно заниматься космологией, изучением крупномасштабной структуры нашей Вселенной. Большинство из них знает также, что (по крайней мере на простейшем уровне) существуют лишь три основные космологические модели — «замкнутая», «плоская» и «открытая» Вселенные. Однако то, что эта простота выбора всего из трёх моделей вовсе не является, собственно говоря, следствием уравнений Эйнштейна, известно гораздо хуже. На самом деле это — следствие предположения об однородности и изотропности крупномасштабных свойств Вселенной. (Точное определение однородности и изотропности будет дано ниже.) Подобно всем фундаментальным физическим теориям, общая теория относительности — динамическая теория; по заданным начальным условиям она предсказывает будущую эволюцию и восстанавливает предшествующую историю. Однородность Вселенной — это часть начальных условий, которые мы задаём при построении простейших моделей. Главное, что даёт общая теория относительности, — это то, что она позволяет нам выбирать *геометрию* пространства — а именно поле его метрического тензора — как часть начальных условий. В ньютоновской теории гравитации такое, конечно, невозможно. Как только принято решение выбрать наиболее однородные начальные условия, остальное — уже дело дифференциальной геометрии; это она скажет нам, что возможны лишь три типа полей метрического тензора. Найти эти метрики и будет нашей задачей в следующих параграфах. Нам понадобится математика симметрий и инвариантности, развитая в гл. 3, но вовсе не понадобится знать что-либо ни об общей теории относительности, ни о римановой геометрии.

Начнём с физики — с самой Вселенной. Несомненно, что в малых масштабах Вселенная «комковата». На любых расстояниях, от ядерных (10^{-15} м) до межзвездных (10^{17} м), для нашего мира характерна тенденция к сосредоточению материи в малых областях с отчетливыми границами между различными типами материи или между материей и вакуумом. Сами звезды группируются в более или менее изолированные галактики, галактики группируются в скопления от нескольких десятков до нескольких тысяч в каждом, и даже скопления группируются в разреженные суперскопления. Но современной астрономии доступны расстояния, превышающие размеры суперскоплений, и там мы видим, что по всем направлениям наблюдается тенденция ко всё большей и большей

однородности свойств Вселенной — после усреднения во всё большем и большем масштабе. Поскольку именно эти крупномасштабные усреднённые характеристики (например, средние плотность и скорость) важны для понимания динамики Вселенной, космолог хотел бы включить эту однородность по крайней мере в простейшие модели. Но каков реальный смысл однородности? В конце концов, в развивающейся Вселенной более удалённые от нас области должны выглядеть иначе, чем близкие, хотя бы потому, что мы наблюдаем их в ранней фазе их истории (см. рис. 5.4). В действительности так оно и есть; число квазаров, например, гораздо больше в удалённых областях, чем вблизи от нас. «Наблюдаемая» однородность — это на самом деле экстраполяция в настоящее время



Рис. 5.4. "Срез" $y = z = 0$ пространства-времени. Точки-события на нём задаются координатами t (время) и x. Поскольку электромагнитные волны распространяются с конечной скоростью, то удалённые объекты мы видим на более ранних стадиях их истории, чем близлежащие.

состояния удалённых областей. Однако в теории относительности и само понятие «настоящего времени» не является абсолютным. Дальнейшее обсуждение этих вопросов выходит за рамки данной книги; здесь можем только сказать, как они решаются.

Основная идея заключается в том, чтобы разбить пространство-время на семейство заполняющих его пространственно-подобных подмногообразий (слоение). Эти подмногообразия называются гиперповерхностями постоянного времени (см. рис. 5.5). Фактически это эквивалентно выбору временной координаты. Метрический тензор пространства-времени g как и любой тензор типа $\binom{0}{m}$, допускает естественное ограничение на каждую гиперповерхность, и гиперповерхность будет пространственно-подобной, если g положительно-определён на всех касательных к ней векторах. Космологическая «однородность» определяется в терминах векторов Киллинга или изометрий этих гиперповерхностей.

Пусть G — группа Ли изометрий некоторого многообразия S с метрическим тензором g. Алгебра Ли группы — это алгебра Ли векторных полей Киллинга для этой метрики. Эле-

менты G суть отображения S на себя (диффеоморфизмы). Действие G на S называется *транзитивным* на S, если для любых двух точек P и Q из S найдется элемент g группы G, удовлетворяющий условию $g(P) = Q$, т. е. переводящий P в Q. Многообразие S называется *однородным*, если его группа

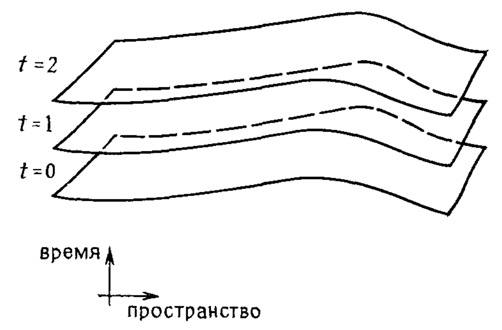


Рис. 5.5. Расслоение пространства-времени на пространства постоянного времени t.

изометрий действует на нём транзитивно (см. рис. 5.6). Это и значит, что *всюду* в S геометрия одинакова.

Предположим, что в G существуют элементы, оставляющие неподвижной некоторую точку P из S. Поскольку произ-

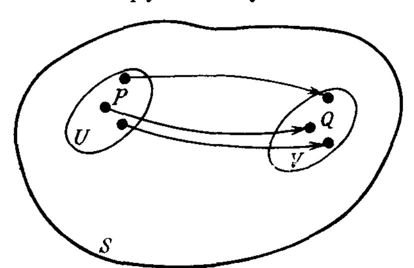


Рис. 5.6. Некоторая окрестность U точки P изометрически отображается посредством g на окрестность V точки $Q = g(P)$; геометрия вблизи P и Q одинаковая.

ведение двух таких элементов тоже оставляет P неподвижной и тождественное преобразование e, очевидно, принадлежит к числу таких элементов, они образуют подгруппу H_P группы G, называемую *группой изотропии* точки P. Очевидно, что это хорошо нам знакомые вращения вокруг осей, проходящих через P. Так как группа изотропии оставляет P на месте, то любая кривая, проходящая через P, отображается в кривую, также проходящую через P (см. рис. 5.7). Это индуцирует отображение пространства касательных векторов в точке

P в себя: $T_P \to T_P$. Эта группа отображений называется линейной группой изотропии точки P. (Вспомните сходное обсуждение присоединённого представления группы Ли в § 3.17.) Многообразие S размерности m называется *изотропным в точке* P, если группа изотропии H_P совпадает с $SO(m)$ — группой вращения вокруг всевозможных осей, проходящих через P. Если S изотропно во всякой своей точке, то оно называется *изотропным*.

Космологическая модель M называется *однородной космологией*, если у неё имеется слоение пространственно-подобных гиперповерхностей, каждая из которых однородна; аналогично определяется *изотропная космология*. Как говорилось выше, есть веские основания считать нашу Вселенную однородной по крайней мере в больших масштабах в наблюдаемой нами окрестности. Кроме того, мы не видим никаких систематических отклонений в её структуре, связанных с выбором направления наблюдения. Это говорит о том, что вокруг нас, в точке, где мы живем, Вселенная изотропна. Но современная наука не полагает, что мы живём в каком-то особенно благоприятном месте во Вселенной. Это положение часто возводится в ранг принципа (известного под разными названиями: *космологический принцип*, принцип Коперника, принцип заурядности): те свойства Вселенной, что мы наблюдаем вокруг нас, увидел бы, в среднем, и любой другой наблюдатель, расположенный в любом другом месте Вселенной. Этот принцип позволяет космологам распространить свойства локальной однородности и изотропности на всю Вселенную — покуда, конечно, нет никаких противоречащих этому фактов. Делать это, разумеется, *не необходимо*, и немало сегодняшних исследований посвящено изучению неоднородной и/или анизотропной космологии. Но три основные модели — это единственно возможные модели, в которых трёхмерные пространства являются однородными и изотропными. Именно это мы и собираемся теперь доказать.

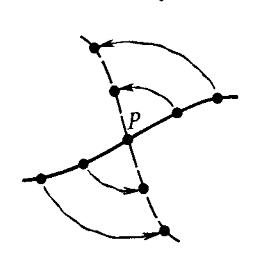


Рис. 5.7. Группа изотропии точки P отображает T_P в T_P, переводя проходящие через эту точку кривые в другие кривые, проходящие через ту же точку.

Упражнение 5.23. Как мы знаем из § 3.9, на сфере S^2 поля $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$, $\bar{l}_z$ являются киллинговыми. Они образуют базис алгебры Ли группы изометрий S^2, т. е. группы $SO(3)$. Докажите, что S^2 — однородное и изотропное многообразие.

5.20. АЛГЕБРА ЛИ МАКСИМАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Мы начнем с изучения векторных полей Киллинга на трёхмерном многообразии S. Если $\bar{\xi}$ — вектор Киллинга, то в любой системе координат его компоненты удовлетворяют уравнению

$$(\pounds_{\xi}\mathrm{g})_{ij} = \xi^k g_{ij,k} + \xi^k{}_{,i} g_{kj} + \xi^k{}_{,j} g_{ik} = 0. \qquad (5.87)$$

Нам будет удобнее пользоваться компонентами один-формы $\mathrm{g}(\bar{\xi},\ )$

$$\xi_k = g_{kl}\xi^l. \qquad (5.88)$$

Они удовлетворяют эквивалентному уравнению

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} - 2\xi_l\Gamma^l{}_{ij} = 0, \qquad (5.89)$$

где, по определению,

$$\Gamma^l{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{lm}(g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m}). \qquad (5.90)$$

(Определение $\Gamma^k{}_{ij}$, включая множитель $\frac{1}{2}$, общепринято и станет понятным после прочтения гл. 6. Для нас здесь (5.90) — всего лишь удобное сокращение.)

Уравнение (5.89) симметрично относительно i и j, а следовательно, в случае n измерений в нём содержится $n(n+1)/2$ независимых дифференциальных уравнений, шесть при $n = 3$. Поскольку ищутся всего три компоненты вектора $\bar{\xi}$, то система переопределена: у произвольного метрического тензора g векторов Киллинга *нет*. Наша цель — выяснить, каким должен быть g, чтоб он допускал максимальное число векторов Киллинга. Найдём, чему равно это максимальное число. Для этого продифференцируем (5.89):

$$\xi_{i,jk} + \xi_{j,ik} = 2(\xi_l\Gamma^l{}_{ij})_{,k}, \qquad (5.91)$$

прибавим к уравнению (5.91) его же с перестановкой $(i\to k,\ j\to i,\ k\to j)$ и вычтем с перестановкой $(i\to j,\ j\to k,\ k\to i)$. В результате придём к равенству

$$\xi_{i,jk} = H_{ijk}{}^l\xi_l + K_{ijk}{}^{lm}\xi_{l,m}, \qquad (5.92)$$

где $H_{ijk}{}^l$ — сложного вида функция от компонент g_{ij} и их первых и вторых производных, а $K_{ijk}{}^{lm}$ подобным же образом зависит от g_{ij} и их первых производных. Главный смысл (5.92) состоит в том, что если мы знаем ξ_i и $\xi_{i,j}$ в некоторой точке P и g_{ij} заданы всюду, то из (5.92) мы можем найти $\xi_{i,jk}$ в P, а последующее дифференцирование (5.92) позволяет найти и высшие производные в этой точке. Если наше многообразие аналитично (что мы предположим), то этого

достаточно, чтобы определить векторное поле ξ_i всюду. Далее, мы знаем, что значения ξ_i в точке P определяют по формуле (5.89) *симметричную часть* $\xi_{i,j}$ в этой точке. Следовательно, каждое векторное поле Киллинга на S полностью определяется заданием значений

$$\eta_i \equiv \xi_i(P) \quad \text{и} \quad A_{ij} \equiv \xi_{[i,j]}(P) \tag{5.93}$$

в *одной какой-нибудь* точке P. Важно отметить, что, задав $\{\eta_i, A_{ij}\}$ в P, мы вовсе не обязательно определим вектор Киллинга, ведь может случиться, что у (5.92) нет решений: правая часть может оказаться несимметричной по j и k. Но приведённые соображения показывают, что число (линейно-независимых) векторов Киллинга не может быть больше числа независимых выборов $\{\eta_i, A_{ij}\}$, которое в случае m измерений равно

$$m + \frac{1}{2} m(m-1) = \frac{1}{2} m(m+1), \tag{5.94}$$

как следует из (5.93). Многообразие называется *максимально-симметричным*, если на нём имеется максимальное число векторных полей Киллинга.

Легко показать, что максимально-симметричное связное многообразие S однородно. В любой точке P мы можем выбрать векторное поле Киллинга по направлению любого касательного вектора в P. И однопараметрические подгруппы, связанные с векторами Киллинга, могут отобразить точку P в любую другую точку Q, принадлежащую некоторой её окрестности U (см. рис. 5.8). Последовательностью таких отображений, очевидно, можно перевести P в какую угодно точку S. Итак, группа изометрий переводит P в любую точку, и S однородно.

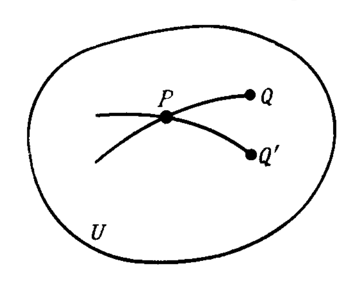


Рис. 5.8 Выбрав подходящую однопараметрическую подгруппу группы изометрий, можно отобразить P в любую точку — хоть в Q, хоть в Q' — окрестности U.

Теперь займёмся группой изотропии точки P. Преобразования из этой группы оставляют P на месте, стало быть, соответствующие векторные поля Киллинга обращаются в нуль в P. Скобка Ли *любых* двух полей Киллинга $\bar{V}$ и $\bar{W}$ равна

$$[\bar{V}, \bar{W}]^i = V^i{}_{,j} W^j - W^i{}_{,j} V^j,$$

или

$$[\bar{V}, \bar{W}]_i = V_{i,j} W^j - W_{i,j} V^j - g_{ik,j}(V^k W^j - W^k V^j). \tag{5.95}$$

Если оба поля $\bar{V}$ и $\bar{W}$ обращаются в нуль в точке P, то то же происходит и с $[\bar{V}, \bar{W}]$. Однако $[\bar{V}, \bar{W}]$ — линейная комбинация векторных полей Киллинга, и, чтобы обратиться в нуль, она должна быть линейной комбинацией полей, которые тоже обращаются в нуль в P. Таким образом, эти поля образуют подалгебру Ли, и ясно, что это — алгебра Ли группы изотропии точки P. Следующее упражнение показывает, что если S пространственно-подобно, то группа изотропии есть $SO(m)$, т. е. что максимально-симметричное пространственно-подобное многообразие изотропно.

Упражнение 5.24. Выберите в точке P координатную систему типа построенной в упр. 2.14, в которой для *пространственно-подобного* многообразия $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ и $g_{ij,k}(P) = 0$.

(a) Покажите, что вблизи P изотропное векторное поле Киллинга даётся формулой

$$V^i = A^i{}_j x^j + O(x^2), \tag{5.96}$$

где $A^i{}_j$ — произвольная антисимметричная матрица:

$$A^i{}_j = -A^j{}_i. \tag{5.97}$$

(b) Пусть $\bar{W}$ — другое изотропное векторное поле Киллинга,

$$W^i = B^i{}_j x^j + O(x^2);$$

покажите, что

$$[\bar{V}, \bar{W}]^i = [A, B]^i{}_j x^j + O(x^2), \tag{5.98}$$

где через $[A, B]^i{}_j$ обозначены элементы матричного коммутатора $A^i{}_j$ и $B^i{}_j$. Отсюда видно, что алгебра Ли группы изотропии совпадает с алгеброй Ли группы $SO(m)$.

(c) Выведите из предыдущего, что группа изотропии точки P есть $SO(m)$.

(d) Покажите, что если g *не* является положительно-определённым (или отрицательно-определённым), то группа изотропии с $SO(m)$ не совпадает. В частности, покажите, что группа изотропии точки P в четырёхмерном пространстве Минковского есть группа Лоренца $L(4)$.

5.21. МЕТРИКА СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Теперь ограничим своё внимание пространственно-подобными трёхмерными многообразиями. В таком случае группа изотропии равна $SO(3)$ и мы говорим, что наше многообразие *сферически-симметрично* в каждой точке. В этом параграфе

мы построим систему координат, удобную для предстоящих вычислений Мы знаем, что интегральные кривые векторных полей Киллинга на группе $SO(3)$ определяют сферы S^2 Поскольку каждая точка принадлежит одной такой сфере, они расслаивают многообразие S Выберем сферические координаты с обычными углами θ и φ на каждой сфере и с третьей «радиальной» координатой, нумерующей сферы Для выбора этой координаты имеется один особенно удобный способ

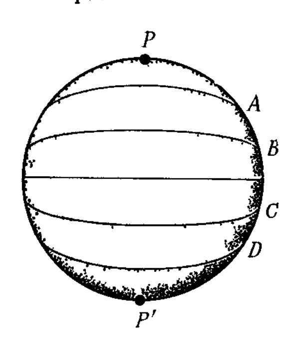


Рис 5 9 Окружности (параллели) на сфере нумерует радиальная координата, определенная как длина окружности поделенная на 2π Это двумерный аналог описанной в тексте ситуации Сначала радиальная координата возрастает с удалением от P (например когда мы движемся от A к B) а потом начинает убывать (например при движении от C к D) и обращается в нуль в точке P'

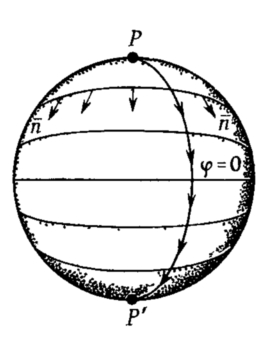


Рис 5 10 Выбор ‘полюса’ на каждой окружности $r = \text{const}$ на сфере рис 5 9 посредством требования, чтобы все полюсы лежали на одной интегральной кривой единичного нормального поля $\bar{n}$

Метрика на S индуцирует на каждой сфере метрический тензор, последний в свою очередь определяет два форму объема и полную площадь (интеграл от два формы объема) *Определим* радиальную координату r, отвечающую данной сфере, равенством

$$\text{площадь сферы} = 4\pi r^2, \quad r = (\text{площадь сферы}/4\pi)^{1/2}. \qquad (5\ 99)$$

Такая внутренним образом определенная координата не обязана монотонно возрастать всюду (см рис 5 9) Но в силу теоремы о приводимости метрики к локально-плоскому виду (упр 2 14) мы можем утверждать, что это будет хорошая координата по крайней мере в некоторой окрестности P (При $r = 0$ она, конечно, сингулярна, но мы знаем, как с этим справиться)

Помимо радиальной координаты надо поаккуратнее определить θ и φ Мы определили φ и θ на каждой сфере, однако мы не сказали, как связаны полюсы $\theta = 0$ двух разных сфер А это значит, что при переходе от одной сферы к другой мы можем свободно сдвигать систему координат Зафиксируем полюсы следующим образом В каждой точке Q существует вектор $\bar{n}$, нормальный к поверхности сферы ($\mathrm{g}(\bar{n}, \bar{V}) = 0$ для каждого $\bar{V}$ из $T_Q(S^2)$), имеющий единичную длину ($\mathrm{g}(\bar{n}, \bar{n}) = 1$) и направленный прочь от точки P (такой выбор можно корректно произвести вблизи P, а на все S распространить по непрерывности) Это векторное поле называется единичным нормальным полем, оно принадлежит классу C^∞ всюду, кроме P Выберем произвольным образом полюс на некоторой сфере S^2, а затем фиксируем полюсы на всех остальных сферах так, чтоб они лежали на интегральной кривой поля $\bar{n}$, проходящей через исходный полюс Эта процедура проиллюстрирована на рис 5 10 Очевидно, что при таком выборе *любая* интегральная кривая поля $\bar{n}$ будет линией постоянства θ и φ, иными словами, она будет координатной линией радиальной координаты Поскольку векторы $\partial/\partial\theta$ и $\partial/\partial\varphi$ касательны к сферам, из нашей конструкции следует, что

$$g_{r\theta} = \mathrm{g}(\partial/\partial r, \partial/\partial\theta) = 0, \tag{5 100a}$$

$$g_{r\varphi} = \mathrm{g}(\partial/\partial r, \partial/\partial\varphi) = 0. \tag{5 100b}$$

Далее, метрика каждой из сфер совпадает с метрикой единичной сферы, умноженной на r^2 (именно этот множитель дает площадь, равную $4\pi r^2$, см (5 99))

$$g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\theta\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta. \tag{5.100c}$$

Итак, у метрического тензора осталась лишь одна неизвестная компонента, g_{rr}

Упражнение 5.25. (a) Определим радиальное расстояние от точки P до сферы с координатой r как интеграл

$$\int_0^r (g_{rr})^{1/2}\,\mathrm{d}r \tag{5.101}$$

вдоль линии $\theta = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$ Докажите, что компонента g_{rr} должна быть независимой от θ и φ

(b) Покажите с помощью упр 2.14, что при приближении к P

$$\lim_{r\to 0} g_{rr} = 1. \tag{5.102}$$

Как видно из упр. 5.25(a), $g_{rr}=f(r)$, и мы получаем метрику

$$(\mathrm{g})=\begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{5.103}$$

Чтобы получить этот ответ, мы использовали лишь группу изотропии P, и нет оснований полагать, что с её помощью мы сможем найти и $f(r)$. Для этого нам понадобятся остальные изометрии S.

5.22. ПОСТРОЕНИЕ ШЕСТИ ВЕКТОРОВ КИЛЛИНГА

Есть несколько способов определить вид функции $f(r)$, гарантирующий однородность S. Предлагаемый же нами метод заключается в построении всех векторных полей Киллинга на S с использованием векторных сферических гармоник, введённых в § 4.29.

Любое векторное поле $\bar{V}$ на S можно записать в виде

$$\bar{V}=\xi_{lm}(r)\,Y_{lm}\frac{\partial}{\partial r}+\eta_{lm}(r)\,\bar{Y}^{+}_{lm}+\zeta_{lm}(r)\,\bar{Y}^{-}_{lm}; \tag{5.104}$$

как здесь, так и в дальнейшем в каждом члене, где индексы l и m повторяются, подразумевается суммирование по ним. Разложим эту формулу по компонентам. Из (4.101) легко получаем

$$\left(\bar{Y}^{+}_{lm}\right)^{\theta}=Y_{lm,\,\theta};\quad \left(\bar{Y}^{+}_{lm}\right)^{\varphi}=\frac{1}{\sin^2\theta}\,Y_{lm,\,\varphi}; \tag{5.105a}$$

$$\left(\bar{Y}^{-}_{lm}\right)^{\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\,Y_{lm,\,\varphi};\quad \left(\bar{Y}^{-}_{lm}\right)^{\varphi}=\frac{-1}{\sin\theta}\,Y_{lm,\,\theta}. \tag{5.105b}$$

Отсюда следует, что

$$V^{r}=\xi_{lm}Y_{lm}, \tag{5.106a}$$

$$V^{\theta}=\eta_{lm}Y_{lm,\,\theta}+\zeta_{lm}Y_{lm,\,\varphi}/\sin\theta, \tag{5.106b}$$

$$V^{\varphi}=\eta_{lm}Y_{lm,\,\varphi}/\sin^2\theta-\zeta_{lm}Y_{lm,\,\theta}/\sin\theta. \tag{5.106c}$$

Эти компоненты должны удовлетворять уравнению Киллинга

$$K_{ij}=V^{k}g_{ij,\,k}+V^{k}{}_{,i}g_{kj}+V^{k}{}_{,j}g_{ik}=0 \tag{5.107}$$

с g_{ij}, определённым формулой (5.103).

В три уравнения $\{K_{\theta\theta}=0,\ K_{\theta\varphi}=0,\ K_{\varphi\varphi}=0\}$ производные от ξ_{lm}, η_{lm} и ζ_{lm} не входят, ими мы и займёмся сначала,

Рассмотрим комбинацию (индексы подняты тензором (5.103))

$$0 = K^{\theta}{}_{\theta} + K^{\varphi}{}_{\varphi} = \frac{4}{r}\xi_{lm}Y_{lm} + 2\eta_{lm}L^2(Y_{lm}),$$

где оператор L^2 определён равенством (3.33). Используя (3.33), получаем

$$[(2/r)\xi_{lm} - l(l+1)\eta_{lm}]\,Y_{lm} = 0.$$

В силу линейной независимости сферических гармоник отсюда следует, что

$$\frac{2}{r}\xi_{lm} - l(l+1)\eta_{lm} = 0. \tag{5.108}$$

Теперь рассмотрим комбинации

$$0 = \frac{1}{2}\left(K^{\theta}{}_{\theta} - K^{\varphi}{}_{\varphi}\right) = F_{lm}\eta_{lm} + G_{lm}\zeta_{lm}, \tag{5.109a}$$

$$0 = -\frac{1}{r^2 \sin\theta} K_{\theta\varphi} = -G_{lm}\eta_{lm} + F_{lm}\zeta_{lm}, \tag{5.109b}$$

где через F_{lm} и G_{lm} обозначены следующие выражения:

$$F_{lm} = Y_{lm,\,\theta\theta} - \operatorname{ctg}\theta Y_{lm,\,\theta} - Y_{lm,\,\varphi\varphi}/\sin^2\theta,$$

$$G_{lm} = 2Y_{lm,\,\theta\varphi}/\sin\theta - 2\operatorname{ctg}\theta Y_{lm,\,\varphi}/\sin\theta.$$

Система (5.109) имеет лишь тривиальное решение $\zeta_{lm} = \eta_{lm} = 0$ при отличном от нуля детерминанте. Последний равен $(F_{lm})^2 + (G_{lm})^2$ и, значит, обращается в нуль, только если и F_{lm} и G_{lm} — нули. Нетрудно убедиться, что это может быть лишь при $l = 0$, 1 (m любое). Но, как видно из (5.106), при $l = 0$ ни η, ни ζ ненулевого вклада не дают (опять теорема о неподвижной точке для S^2!), и в итоге мы получаем

$$\begin{aligned} l = 1&: \ \eta_{1m},\ \zeta_{1m}\ \text{произвольны}, \\ l \geqslant 2&: \ \eta_{lm},\ \zeta_{lm} = 0. \end{aligned} \tag{5.110}$$

В силу (5.108) имеем

$$\begin{aligned} l = 0&: \ \xi_{00} = 0, \\ l = 1&: \ \xi_{1m} = r\eta_{1m}, \\ l \geqslant 2&: \ \xi_{lm} = 0. \end{aligned} \tag{5.111}$$

Теперь займёмся тремя другими уравнениями в (5.107). Первое даёт скаляр относительно вращений:

$$0 = K_{rr} = (2f\xi_{lm,\,r} + f_{,r}\xi_{lm})\,Y_{lm},$$

следовательно,

$$f\xi_{lm,\,r} + \frac{1}{2}f_{,r}\xi_{lm} = 0. \tag{5.112}$$

Два оставшихся уравнения $K_{r\theta} = K_{r\varphi} = 0$ относительно вращений образуют вектор. Дивергенция этого вектора (относительно объёма на S^2) равна

$$0 = (\sin\theta K_r{}^\theta)_{,\theta} + (\sin\theta K_r{}^\varphi)_{,\varphi} =$$

$$= \left(\eta_{lm,r} + \frac{1}{r^2} f\xi_{lm}\right)\sin\theta L^2(Y_{lm}),$$

откуда следует, что (при $l > 0$)

$$\eta_{lm,r} + \frac{1}{r^2} f\xi_{lm} = 0. \tag{5.113}$$

Наконец, для получения последнего уравнения можно взять дивергенцию от дуальной к вектору на S^2 величины:

$$0 = K_{r\theta,\varphi} - K_{r\varphi,\theta} = r^2\zeta_{lm,r}\sin\theta L^2(Y_{lm}),$$

и очевидно, что

$$\zeta_{lm,r} = 0. \tag{5.114}$$

Итак, мы приходим к выводу, что весь вклад от $\bar{Y}_{lm}$ определяется тремя произвольными постоянными $\{\zeta_{1m}, m = -1, 0, 1\}$. Решение оставшихся трёх уравнений (относительно неизвестных ξ_{1m}, η_{1m} и f) можно выразить через произвольные постоянные K и V_m:

$$f = (1 - Kr^2)^{-1}, \tag{5.115}$$

$$\xi_{1m} = V_m(1 - Kr^2)^{1/2}, \tag{5.116}$$

$$\eta_{1m} = \frac{1}{r} V_m(1 - Kr^2)^{1/2}. \tag{5.117}$$

Упражнение 5.26. Проверьте формулы (5.105), (5.108), (5.109), (5.112)—(5.117).

Упражнение 5.27. Покажите, что векторы Киллинга с $V_m = 0$ — это как раз векторы, отвечающие группе изотропии начала координат ($r = 0$).

Упражнение 5.28. Покажите, что сингулярность η_{1m} при $r \to 0$ — чисто координатный эффект: векторное поле корректно определено в этой точке.

Упражнение 5.29. Положите $K = 0$ в (5.115—117) и покажите, что в этом случае S совпадает с E^3 (эвклидовым пространством). Найдите постоянные V_m, определяющие векторы Киллинга $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$, при условии что декартовы координаты получены из наших полярных обычным образом.

5.23. ОТКРЫТАЯ, ЗАМКНУТАЯ И ПЛОСКАЯ ВСЕЛЕННЫЕ

Теперь мы располагаем полным описанием геометрии однородных и изотропных пространств космологических моделей: они имеют метрический тензор вида

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (1-Kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \qquad (5.118)$$

Остаётся лишь понять, как эта геометрия выглядит, и поможет в этом нам следующая замена координат.

Упражнение 5.30. Найдите преобразование координат от r к χ, приводящее метрический тензор к виду
при $K > 0$:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{K}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\chi \sin^2\theta \end{pmatrix}, \qquad (5.119a)$$

при $K < 0$:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{|K|}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sh}^2\chi \operatorname{sh}^2\theta \end{pmatrix}. \qquad (5.119b)$$

Теперь видно, что геометрия фактически зависит лишь от знака K. Абсолютная величина K служит просто всеобщим масштабным множителем.

В случае $K > 0$ площадь сферы с координатой χ равна $4\pi \times \sin^2\chi/K$. При увеличении χ от $\chi = 0$ до $\chi = \pi$ она сначала возрастает, достигая максимума при $\chi = \pi/2$, а потом убывает до нуля в точке $\chi = \pi$, что напоминает нам ситуацию на сфере S^2 (рис. 5.9). И действительно, фактически мы имеем дело с метрикой сферы S^3 радиуса $K^{-1/2}$. Поскольку это пространство конечно, такая Вселенная называется *замкнутой*.

Упражнение 5.31. Найдите в E^4 преобразование, переводящее декартовы координаты $\{x^i\} = \{w, x, y, z\}$ в сферические координаты $\{x^{i'}\} = \{r, \chi, \theta, \varphi\}$, в которых метрика $g_{ij} = \delta_{ij}$, ограниченная на сферу S^3: $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = K^{-1}$, будет иметь компоненты (5.119a).

Случай $K = 0$ был разобран в упр. 5.29. Это — *плоская* Вселенная.

Случай $K < 0$ — это *открытая* Вселенная, и его труднее всего представить. Площадь поверхности сферы с радиальной координатой χ равна $4\pi \operatorname{sh}^2\chi/|K|$ и растёт с ростом K всё быстрее и быстрее. Эта Вселенная неограниченна.

Упражнение 5.32. (а) Рассмотрев соотношение между площадью сфер $\chi = \mathrm{const}$ и расстоянием от сферы до начала координат $\chi = 0$ (см. (5.101)), докажите, что метрика (5.119b) не является ограничением эвклидовой метрики на подмногообразие в E^n ни для какого n и *ни для какого* подмногообразия в E^n.

(b) Найдите подмногообразие в пространстве Минковского, имеющее метрику (5.119b).

В случае когда для уравнений Эйнштейна выбраны однородные и изотропные начальные данные (речь идёт не об одной геометрии, а ещё и о переменных, описывающих материю), последующее развитие Вселенной эту симметрию сохраняет. Следовательно, единственная геометрическая характеристика, которая может меняться со временем, — это масштабный множитель K: со временем Вселенная становится «больше» или «меньше». Однако следует проявить осторожность и не делать зависящих от координат утверждений. В замкнутой Вселенной, имеющей конечный полный объём изменение K вызывает изменение полного объёма. Но плоская и открытая Вселенные бесконечны, и говорить об их полном объёме не имеет смысла. Тем не менее общая теория относительности позволяет смотреть на систему координат, в которой записаны формулы (5.119), как на «сопровождающую»: в любой малой области Вселенной локальная система покоя галактик не меняет своих координат $\{\chi, \theta, \varphi\}$ при изменении времени. Отсюда следует, что изменения K приводят к изменению расстояния между галактиками, а это как раз то, что имеют в виду, говоря о расширяющейся Вселенной. В «стандартных моделях», предполагающих однородность, изотропность и ряд других свойств, все три типа Вселенной начинают своё существование с нулевого «объёма» ($K = \infty$) — с «большого взрыва» — и затем расширяются. Замкнутая Вселенная расширяется до некоторого максимума, а потом опять сжимается, скорость расширения плоской Вселенной асимптотически стремится к нулю, а открытая Вселенная расширяется со скоростью, имеющей ненулевой асимптотический предел. Все эти свойства следуют из уравнений Эйнштейна. Однако для понимания этих уравнений необходимо ввести на многообразии еще одну дополнительную структуру — аффинную связность. Она составляет предмет гл. 6.

5.24. БИБЛИОГРАФИЯ

Краткое и прекрасно написанное введение в термодинамику — книга Э Ферми, «Термодинамика» (Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973). Теорема Каратеодори обсуждается в книге S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure (Dover, New York, 1958), а на более современном уровне — в книге R Hermann, Differential Geometry and the Calculus of Variations (Academic Press, New York, 1968).

Наше обсуждение гамильтоновой механики близко по духу к изложению, данному в R. Abraham & J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, 2nd ed. (Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978). Познакомиться с теми же понятиями, но без всякой геометрии можно по книгам Голдстейн Г. Классическая механика (М.: Наука, 1975) или Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 1. Механика (М.: Наука, 1975). Привлекая канонические сохраняющиеся величины, проще понять некоторые явления неустойчивости в жидкостях, см. J. L. Friedman & B. F. Schutz, Astrophys. J. **221**, 937—957 (1978); **222**, 281—296 (1978). Ряд полезных статей по гамильтоновой механике с геометрической точки зрения можно найти в сборнике Topics in Nonlinear Dynamics — A Tribute to Sir Edward Bullard, ed. S. Jorna, American Institute of Physics, 1978; A. I. P. Conference Proceeding no. 46. Интересный пример использования дифференциальных форм для вывода необходимых и достаточных условий того, что система динамических уравнений имеет гамильтонову (т. е. симплектическую) структуру, приведён в книге R. M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics. I — The Inverse Problem in Newtonian Mechanics (Springer, Berlin, 1978).

Введение в теорию электромагнетизма, включающее релятивистскую формулировку теории, дано в книге Д. Джексона «Классическая электродинамика» (М.: Мир, 1965). Продолжение и развитие нашего изложения можно найти в книге Ч. Мизнера, К. Торна, Дж. Уилера «Гравитация» (М.: Мир, 1977). Развёрнутое изложение теории релятивистских волновых уравнений см. в книге F. G. Fridlander, The Wave Equations on a Curved Space Time (Cambridge University Press, 1976). Уилеров «заряд без заряда» обсуждается в статьях, воспроизведённых в сборнике J A. Wheeler, Geometrodynamics (Academic Press, New York, 1962). Неориентируемая модель заряда, принадлежащая Соркину, описана в статье R. Sorkin, J. Phys. A **12**, 403—421 (1979).

Введение в гидродинамику, включающее теорему Гельмгольца, дано в книгах: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, Механика сплошных сред (М: Гостехиздат, 1954); Ламб Г. Гидродинамика (М.: Гостехиздат, 1947). То, что мы назвали теоремой Эртеля, на самом деле есть лишь частный случай результата, полученного Х. Эртелем (H Ertel, Meteorologishe Zeitschrift **59**, 277 (1942)). Мы вкратце касались свойств многообразия, называемого «галилеевым пространством-временем», на котором разыгрывается нерелятивистская физика. Исследование его структуры требует привлечения понятия аффинной связности, разбираемого в следующей главе; см. указанную выше книгу Мизнера, Торна и Уилера, где содержится весьма прозрачное обсуждение вопроса, или книгу R. Hermann. Topics in General Relativity (Math-Sci Press, Brooklin, Mass., 1973), где дано более техническое изложение. Использование производных Ли в механике сплошных сред особенно плодотворно в теории упругости. Действительно, сформулировать обще-релятивистскую теорию упругости без помощи такого аппарата чрезвычайно трудно. См. B. Carter & H. Quintana, Proc. Roy. Soc. London, **A331**, 57 (1972) или B. Carter, Proc. Roy. Soc. London, A, to be published.

Космология рассматривается в большинстве учебников по общей теории относительности. В нашем изложении использованы элементы из книги С. Вейнберга «Гравитация и космология» (М.: Мир, 1975) и всё той же книги Мизнера и др. Более простое введение см. у M. Berry, Principles of Cosmology and Gravitation (Cambridge University Press, 1977) С астрофизической и экспериментально-наблюдательной точек зрения космология обсуждается в указанной книге Вейнберга и в книге P. J. E. Peebles, Physical Cosmology (Princeton University Press, 1971) [имеется перевод: Пиблс П. Физическая космология. — М.: Мир, 1975]. Однородные, но не обязательно изотропные космологии исследуются с помощью методов теории групп в книге M. P. Ryan & L. C. Shepley, Homogeneous Relativistic Cosmologies (Princeton University Press, 1975).

6. СВЯЗНОСТИ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

6.1. ВВЕДЕНИЕ

Предмет этой главы лежит несколько в стороне от основной темы книги — изучения дифференциальных структур на многообразиях. Аффинная связность — это дополнительная структура, придающая многообразию кривизну и форму; она не возникает естественно из дифференциальной структуры, она даже не является тензором. Поэтому настоящая глава играет роль дополнения. Однако без этой важной и злободневной темы никакое изучение дифференциальной геометрии не будет полным для физика. Особенно в физике элементарных частиц, в калибровочных теориях, связности приобретают всё большую популярность. В основном мы будем обсуждать *аффинные* связности (на римановых многообразиях) и лишь под занавес отведём небольшой параграф вводного характера калибровочным связностям.

В предыдущих главах нам уже приходилось вводить дополнительные структуры на многообразиях; мы делали это, выделяя некоторое тензорное поле среди других, с тем чтобы оно служило нам в качестве метрики или элемента объёма. Задание элемента объёма совсем недалеко выводит за рамки дифференциальной структуры многообразия. Метрика же, как мы увидим в дальнейшем, порождает много дополнительных структур и помимо аффинной связности. Правда, в описанных ранее приложениях можно было просто не обращать внимания на всё это и использовать метрику лишь в её роли отображения тензоров типа $\binom{N}{M}$ и тензоры типа $\binom{N-1}{M+1}$. Аффинная связность не укладывается в рамки уже построенных структур. С точки зрения дифференциальной геометрии это совершенно новая структура на многообразии, дающая богатые новые возможности для физических приложений.

6.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ НА ИСКРИВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Как мы уже неоднократно подчёркивали, на дифференцируемых многообразиях нет само собой разумеющегося понятия параллельности векторов в разных точках. Аффинная связность — это *правило*, посредством которого вводится по-

нятие параллельности. Чтобы представить, какого сорта правила вообще возможны, рассмотрим понятие параллельности на обычной двумерной поверхности, скажем на сфере. На рис. 6.1 вектор $\bar{V}$ — это касательный вектор к большому кругу ABC в северном полюсе, обозначенном A. Представим, что мы «переносим» $\bar{V}$ вдоль ABC к южному полюсу C. Для того чтоб вектор продолжал «лежать на сфере», он должен всё время оставаться в касательной плоскости к сфере, и, если по дороге мы не будем его поворачивать, он будет просто оставаться касательным к кривой ABC. В точку C он

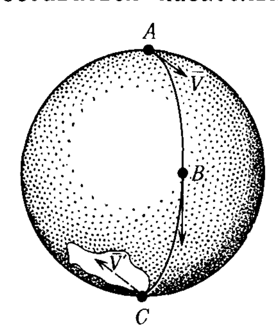


Рис. 6.1. Параллельный перенос вектора $\bar{V}$ по большому кругу на сфере.

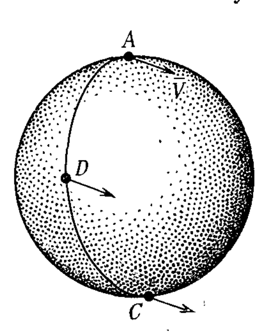


Рис. 6.2. Другой путь параллельного переноса, приводящий к другому результату.

придёт вектором $\bar{V}'$, направленным с точки зрения нашего трёхмерного мира точно противоположно вектору $\bar{V}$. Должны ли мы считать, что хотя бы с точки зрения геометрии сферы векторы $\bar{V}$ и $\bar{V}'$ параллельны? Прежде чем сделать окончательный вывод, представим, что мы переносим $\bar{V}$ из точки A в точку C по пути ADC, изображенному на рис. 6.2, где ADC — другой большой круг, пересекающий ABC в обоих полюсах под прямым углом. Поскольку в начале пути $\bar{V}$ перпендикулярен ADC, то естественно считать, что мы движем его, не поворачивая, если он всё время будет оставаться перпендикулярным к ADC и касательным к сфере. Таким образом в точке C мы получим вектор $\bar{V}''$, который для нас, трёхмерных, и в самом деле параллелен вектору $\bar{V}$. Но векторы $\bar{V}''$ и $\bar{V}'$ в точке C направлены прямо противоположно! Который из них параллелен $\bar{V}$? Ясно, что если мы будем рассматривать свойства сферы как таковой, ни один вектор не заслуживает быть названным параллельным $\bar{V}$. Понятия параллельности как таковой просто *нет*. Всё, что можно сделать, и как раз это мы и делали, — это определить понятие параллельного *переноса*, понятие движения вектора вдоль кривой без изменения его направления. *Аффинная связность есть правило параллельного переноса.*

6.3. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Будем пока смотреть на аффинную связность как на чисто абстрактное понятие; более конкретный облик она приобретёт в следующем пункте, когда мы перейдём к компонентам. Итак, предположим, что мы имеем кривую $\mathscr{C}$ и связность, т. е. правило параллельного переноса. Обозначим через $U = d/d\lambda$ касательный вектор к $\mathscr{C}$. Зафиксируем в точке P произвольный вектор $\bar{V}$ из T_P. Тогда связность позволяет нам задать

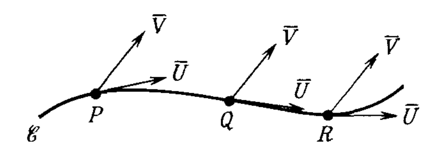


Рис 6 3. Аффинная связность позволяет *определить* $\bar{V}(Q)$ в любой точке Q кривой $\mathscr{C}$ как результат параллельного переноса вектора $\bar{V}$ из точки P.

векторное поле $\bar{V}$ вдоль кривой $\mathscr{C}$, полученное параллельным переносом $\bar{V}$ (см. рис. 6.3). Поскольку мы можем теперь сказать, что $\bar{V}$ не меняется вдоль $\mathscr{C}$, мы можем определить производную, в смысле которой изменение $\bar{V}$ равно нулю. Она

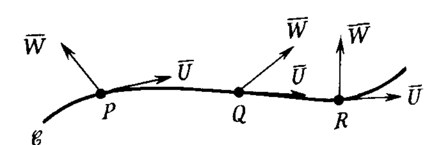


Рис. 6 4 Векторное поле $\bar{W}$ на $\mathscr{C}$ не есть результат параллельного переноса. Сравнение с векторным полем, которое таковым является, позволяет определить ковариантную производную поля $\bar{W}$.

называется *ковариантной производной по направлению* $\bar{U}$ и обозначается через $\nabla_{\bar{U}}$; итак,

$$\blacklozenge \quad \nabla_{\bar{U}}\bar{V} = 0 \Leftrightarrow \bar{V} \text{ есть результат параллельного переноса вдоль } \mathscr{C}. \tag{6.1}$$

Если $\bar{W}$ — произвольное векторное поле, заданное всюду на $\mathscr{C}$, то мы можем определить его ковариантную производную вдоль $\mathscr{C}$ почти так же, как мы определяли производную Ли (см. рис. 6.4). Чтобы определить $\nabla_{\bar{U}}\bar{W}$ в точке P, удобно все векторы представить как функции от λ. Пусть точке P отвечает значение λ_0. Определим поле $\overline{W}^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda)$ как результат параллельного переноса $(\nabla_{\bar{U}}\overline{W}^* = 0)$ вектора $\bar{W}$ из точки $\lambda_0 + \varepsilon$, так что вектор $\overline{W}^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda_0)$ получается параллельным переносом вектора $\bar{W}(\lambda_0 + \varepsilon)$ назад в точку λ_0. Теперь, когда

сравниваемые векторы лежат в одном пространстве T_P, мы можем записать определение производной:

$$(\nabla_{\bar{U}}\bar{W})_P = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{W}^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda_0) - \bar{W}(\lambda_0)}{\varepsilon}. \tag{6.2}$$

Хотя эта процедура напоминает ту, которую мы использовали при определении производной Ли, важно уяснить имеющуюся принципиальную разницу между ними: чтобы перенести назад вектор при вычислении производной Ли, нужна полная конгруэнция, т. е. $\bar{U}$ и $\bar{W}$ должны быть определены в целой окрестности кривой $\mathscr{C}$; для параллельного переноса нам нужны лишь кривая $\mathscr{C}$, векторные поля $\bar{U}$ и $\bar{W}$ на этой кривой и, конечно, связность на этой кривой.

Как легко вывести из (6.2), $\nabla_{\bar{U}}$ — дифференциальный оператор:

$$\nabla_{\bar{U}}(f\bar{W}) = f\nabla_{\bar{U}}\bar{W} + \bar{W}\nabla_{\bar{U}}f = f\nabla_{\bar{U}}\bar{W} + \bar{W}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} \tag{6.3a}$$

(определение ковариантной производной для скаляров очевидно). Правило Лейбница позволяет распространить определение ковариантной производной на тензоры произвольного типа:

◆ $$\nabla_{\bar{U}}(\bar{A}\otimes\bar{B}) = (\nabla_{\bar{U}}\bar{A})\otimes\bar{B} + \bar{A}\otimes(\nabla_{\bar{U}}\bar{B}), \tag{6.3b}$$

◆ $$\nabla_{\bar{U}}\langle\tilde{\omega}, \bar{A}\rangle = \langle\nabla_{\bar{U}}\tilde{\omega}, A\rangle + \langle\tilde{\omega}, \nabla_{\bar{U}}\bar{A}\rangle. \tag{6.3c}$$

Равенства (6.3) гарантируют согласованность связности с дифференциальной структурой.

Представим, что мы ввели новый параметр на кривой, перейдя от параметра λ к параметру μ. Тогда новым касательным вектором будет $g\bar{U}$, где $g = \mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\mu$. Из (6.2) видно, что ковариантная производная тоже умножится на g, поскольку ε заменится на $\delta\mu = \varepsilon\,\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\lambda$, а $\bar{W}^*_{\mu_0+\delta\mu}(\mu_0)$ совпадает с $\bar{W}^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda_0)$. (Это, строго говоря, входит в определение связности: понятие параллельного переноса вдоль кривой не должно зависеть от выбора параметризации.) Отсюда можно заключить, что для любой функции g

$$\nabla_{g\bar{U}}\bar{W} = g\nabla_{\bar{U}}\bar{W}. \tag{6.4a}$$

Ещё одно условие, которому должна удовлетворять аффинная связность, — это свойство аддитивности ковариантных производных по разным направлениям:

$$(\nabla_{\bar{U}}\bar{W})_P + (\nabla_{\bar{V}}\bar{W})_P = (\nabla_{\bar{U}+\bar{V}}\bar{W})_P. \tag{6.4b}$$

Оно делает ковариантную ∇ похожей на обычную ∇ эвклидова векторного исчисления. Соотношения (6.4a, b) в совокупности показывают, что для любых векторных полей $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ и функций f, g

$$\blacklozenge \quad \nabla_{f\bar{U}+g\bar{V}}\bar{W} = f\nabla_{\bar{U}}\bar{W} + g\nabla_{\bar{V}}\bar{W}. \tag{6.4c}$$

Упражнение 6.1. Покажите, что из (6.4c) и того, что $\nabla_{\bar{U}}\bar{W}$ есть вектор, следует, что $\nabla\bar{W}$ есть тензор типа $\binom{1}{1}$, значение которого на аргументах $\bar{U}$ и $\tilde{\omega}$ равно

$$\nabla\bar{W}(\tilde{\omega};\ \bar{U}) = \langle\tilde{\omega},\ \nabla_{\bar{U}}\bar{W}\rangle. \tag{6.5}$$

Этот тензор называется *градиентом* поля $\bar{W}$.

Тот факт, что $\nabla\bar{W}$ есть тензорное поле, означает, что мы можем совсем убрать кривую из определения ковариантной производной. Тензор $\nabla\bar{W}$ определяется только связностью и самим полем $\bar{W}$. Есть искушение пойти дальше и сказать, что ∇ сама по себе есть тензорное поле типа $\binom{0}{1}$, представляющее связность, но это будет ошибкой. Хотя и можно считать, что ∇ представляет связность, тензорным полем она не является, так как $\nabla(f\bar{W}) \neq f\nabla\bar{W}$ (см. (6.3a)). Вот что не позволяет смотреть на связность как на тензорное поле.

6.4. КОМПОНЕНТЫ: КОВАРИАНТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ БАЗИСА

Поскольку каждый тензор можно представить в виде линейной комбинации базисных тензоров, а эти последние в свою очередь можно получить из векторного базиса $\{\bar{e}_i\}$, то связность полностью описывается градиентами базисных векторов. Итак, положим

$$\blacklozenge \quad \nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j = \Gamma^k{}_{ji}\bar{e}_k. \tag{6.6}$$

Функции $\Gamma^k{}_{ji}$ называются *символами Кристоффеля.* При фиксированных (i, j) $\Gamma^k{}_{ji}$ есть k-я компонента векторного поля $\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j$. Обратите внимание на порядок индексов у Γ: связанный с производной индекс идёт последним. Часто мы будем пользоваться сокращением

$$\nabla_{\bar{e}_i} \equiv \nabla_i. \tag{6.7}$$

На n-мерном многообразии n^3 функций $\Gamma^k{}_{ji}$ полностью определяют аффинную связность, и часто это самый удобный способ её описания. Отметим, что $\Gamma^k{}_{ji}$ тензора не образуют: при

преобразованиях базиса индексы k и i ведут себя как тензорные (в силу (6.5)), а j нет (в силу (6.3а)).

Упражнение 6.2. Покажите, что

$$\Gamma^{k'}{}_{j'i'} = \Lambda^{k'}{}_k \Lambda^i{}_{i'} \Lambda^j{}_{j'} \Gamma^k{}_{ji} + \Lambda^{k'}{}_k \Lambda^i{}_{i'} (\nabla_i \Lambda^k{}_{j'}),$$

где под $\nabla_i \Lambda^k{}_{j'}$ подразумеваются $\mathrm{d}\Lambda^k{}_{j'}/\mathrm{d}\lambda_i$, а $\bar{e}_i = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda_i$ и $\Lambda^k{}_{j'}$ рассматриваются как функции на интегральных кривых полей $\bar{e}_i$.

Упражнение 6.3. Покажите с помощью упр. 6.1, что

$$\{\Gamma^k{}_{ji} \bar{e}_k \otimes \tilde{\omega}^i\}$$

есть набор n тензоров типа $\binom{1}{1}$. (Здесь $\{\tilde{\omega}^i\}$ — базисные один-формы, дуальные к $\{\bar{e}_i\}$.)

Упражнение 6.4. На единичной сфере обычные сферические координаты θ и φ задают базис $\{\bar{e}_\theta = \partial/\partial\theta,\ \bar{e}_\varphi = \partial/\partial\varphi\}$. Развивая соображения, высказанные в § 6.2, докажите, что

$$\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \operatorname{ctg}\theta,$$

а остальные Γ равны нулю. (NB Это непростая задача. Вы должны максимально использовать симметрию сферы и догадаться (это совсем не тривиально!), как ведут себя векторы при параллельном переносе.)

Упражнение 6.5. Выведите из (6.6) и (6.3с), что

◆ $$\nabla_i \tilde{\omega}^j = -\Gamma^j{}_{ki} \tilde{\omega}^k. \qquad (6.8)$$

Теперь, когда у нас есть производные базисных векторов, мы можем найти производные любых тензоров. Например, если $\bar{U} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$, то

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{V} = U^i \nabla_{\bar{e}_i} (V^j \bar{e}_j) = U^i \left(\nabla_{\bar{e}_i} V^j\right) \bar{e}_j + U^i V^j \nabla_{\bar{e}_i} \bar{e}_j.$$

В первом члене V^j — просто функция и $U^i \nabla_i (V^j) = \mathrm{d}V^j/\mathrm{d}\lambda$. Поэтому

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar{U}} \bar{V} &= \frac{\mathrm{d}V^j}{\mathrm{d}\lambda} \bar{e}_j + U^i V^j \Gamma^k{}_{ji} \bar{e}_k \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}V^j}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^j{}_{ki} V^k U^i\right) \bar{e}_j.\end{aligned}$$

Чтоб получить окончательное выражение, нам пришлось переобозначить индексы суммирования в последнем члене. Поскольку $\nabla\bar{V}$ — тензор, можно найти его компоненты:

$$(\nabla\bar{V})^j{}_i = \nabla_i (V^j) + \Gamma^j{}_{ki} V^k.$$

Несколько слов относительно члена $\nabla_i(V^j)$. Если $\bar{e}_i$ есть вектор $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$, то $\nabla_i(V^j)=\mathrm{d}V^j/\mathrm{d}\mu$, где V^j — просто функции, заданные на кривой с параметром μ. Если $\bar{e}_i$ — координатные базисные векторы, то $\bar{e}_i = \partial/\partial x^i$, и мы получаем

$$\nabla_i V^j = \frac{\partial}{\partial x^i} V^j = V^j{}_{,i};$$

здесь использовано «правило запятой», введённое для дифференциальных форм. Обычно правило запятой используется и тогда, когда $\bar{e}_i$ не являются координатными базисными векторами:

$$\nabla_{\bar{e}_i} f = \bar{e}_i[f] \equiv f_{,i} \tag{6.9}$$

для любой функции f. В случае когда $\bar{e}_i$ — координатные базисные векторы, ∇_i совпадает с обычной частной производной, когда нет, это просто производная по направлению $\bar{e}_i$. Итак, мы можем записать

◆ $$(\nabla\bar{V})^j{}_i = V^j{}_{,i} + \Gamma^j{}_{ki}V^k \equiv V^j{}_{;i}; \tag{6.10}$$

мы ввели обозначение «точка с запятой» для ковариантной производной. Хотя ни $V^j{}_{,i}$, ни $\Gamma^j{}_{ki}V^k$ не преобразуются как тензоры, их сумма есть тензор.

Упражнение 6.6. Покажите, что если $\tilde{\omega}$ — один-форма, то

$$(\nabla\tilde{\omega})_{ij} \equiv \omega_{i;j} = \omega_{i,j} - \Gamma^k{}_{ij}\omega_k. \tag{6.11}$$

Упражнение 6.7. Покажите, что если $\mathbf{T}$ — тензор типа $\binom{N}{M}$, то

$$T^{i\ \cdot\ j}{}_{k\ \ l,m} = T^{i\ \cdot\cdot\ j}{}_{k\ldots l,m} + \Gamma^i{}_{nm}T^{n\ \cdot\cdot\ j}{}_{k\,.\,.\,l} + \ldots$$
$$+\Gamma^j{}_{nm}T^{i\ \cdot\cdot\ n}{}_{k\ \ l} - \Gamma^n{}_{km}T^{i\ \cdot\ j}{}_{n\ldots l} - \ldots - \Gamma^n{}_{lm}T^{i\ \cdot\cdot\ j}{}_{k\ \ .n}. \tag{6.12}$$

6.5. КРУЧЕНИЕ

Величины $[\bar{U}, \bar{V}]$ и $\nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U}$ обе представляют собой векторные поля и обе антисимметричны по $\bar{U}$ и $\bar{V}$. Связность называется *симметричной*, если они равны:

◆ $$\nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U} = [\bar{U}, \bar{V}] \Longleftrightarrow \text{связность симметрична.} \tag{6.13}$$

Название «симметричная» объясняется свойством, доказываемым в следующем упражнении.

Упражнение 6.8. Покажите, что в *координатном* базисе из (6.13) следует, что связность симметрична тогда и только тогда, когда

◆ $$\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}. \tag{6.14}$$

Для несимметричной связности определим *кручение* $T^k{}_{ji}$ формулой

$$\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j - \nabla_{\bar{e}_j}\bar{e}_i - [\bar{e}_i, \bar{e}_j] \equiv T^k{}_{ji}\bar{e}_k. \tag{6.15}$$

Упражнение 6.9. Покажите, что $\{T^k{}_{ji}\}$ образуют *тензор* типа $\binom{1}{2}$; мы будем называть его *тензором кручения* и обозначать через $\mathbf{T}$:

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U} - [\bar{U}, \bar{V}] = \mathbf{T}(\ ;\ \bar{U}, \bar{V}).$$

Пустое место в скобках оставлено для аргумента — одинформы.

Упражнение 6.10. Пусть на многообразии заданы две связности с символами Кристоффеля $\Gamma^k{}_{ij}$ и $\Gamma'^k{}_{ij}$ соответственно. Покажите, что

$$D^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ij} - \Gamma'^k{}_{ij}$$

являются компонентами тензора типа $\binom{1}{2}$. Покажите, что этот тензор $\mathbf{D}$ симметричен по своим векторным аргументам тогда и только тогда, когда тензоры кручения обеих связностей совпадают.

Упражнения 6.9 и 6.10 показывают, что мы всегда можем определить *симметричную часть* $\nabla_{(S)}$ любой связности ∇, задав её символы Кристоффеля формулой

$$\Gamma^k{}_{(S)\,ij} = \Gamma^k{}_{ij} - \frac{1}{2}T^k{}_{ij}.$$

Хотя кручение в принципе тоже полезная часть связности, но в конструировании математических моделей физических законов оно не так популярно, как симметричная часть. Начиная с этого места мы будем иметь дело только с симметричными связностями, за исключением тех случаев, когда явно оговорено противное. Одна из причин для такого решения станет ясна из упр. 6.18. Заметим, что из определения (6.13) непосредственно вытекает следующее свойство.

Упражнение 6.11. Пусть на многообразии задана симметричная связность. Покажите, что в любом выражении для компонент производной Ли любого тензора все запя-

тые можно заменить на точки с запятой. Например,

$$(\mathcal{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega})_i = \omega_{i,\,j}U^j + \omega_j U^j{}_{,\,i} = \omega_{i;\,j}U^j + \omega_j U^j{}_{;\,i}.$$

(Естественно, при этом надо заменять *все* запятые, а не только некоторые.)

6.6. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

Геодезическая — это такая кривая, собственный касательный вектор которой переносится вдоль неё параллельно. Уравнение геодезической:

$$\blacklozenge \qquad \nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0. \tag{6.16a}$$

Если λ — параметр кривой и задана система координат $\{x^i\}$, то оно принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}U^i}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^i{}_{jk}U^jU^k = 0, \tag{6.16b}$$

или

$$\blacklozenge \qquad \frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda} = 0. \tag{6.16c}$$

Последнее уравнение — это квазилинейная система дифференциальных уравнений относительно функций $x^i(\lambda)$, задающих геодезическую кривую.

Упражнение 6.12. Напомним, что наше определение кривой включает в себя задание параметра. Покажите, что если (6.16c) верно для параметра λ, то при замене его на

$$\mu = a\lambda + b, \tag{6.17}$$

где a и b — постоянные, мы тоже получим решение (6.16c). По этой причине параметр геодезической кривой называется *аффинным параметром.*

Заметим, что в уравнение геодезической входит лишь симметричная часть связности. Это позволяет представить эффект кручения геометрически. Возьмём геодезическую с касательным вектором $\bar{U}$, проходящую через точку P. В T_P выберем какое-нибудь $(n-1)$-мерное подпространство R_P (размерность многообразия n), состоящее из линейно-независимых от $\bar{U}$ векторов. Зафиксируем вектор $\bar{\xi}$ из R_P и проведём через P геодезическую, касательную к $\bar{\xi}$. Используя симметричную часть связности, перенесём $\bar{U}$ параллельно вдоль $\bar{\xi}$ на малое расстояние (в смысле аффинного параметра) ε. Через эту новую точку проведём новую геодезическую, каса-

тельную к $\bar{U}$ в этой точке (т. е. к $\bar{U}'$ на рис. 6.5). Эта геодезическая будет почти что параллельна исходной. Таким способом мы можем провести геодезические, «параллельные» $\bar{U}$, через каждую точку из окрестности P. Мы можем переносить «связующий» вектор $\bar{\xi}$ вдоль этой конгруэнции геодезических двумя разными способами: либо с помощью параллельного

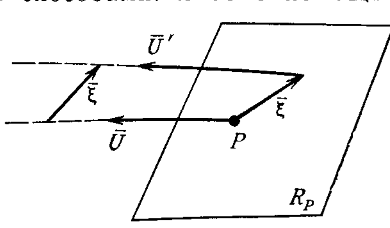


Рис. 6.5. Две параллельные геодезические $\bar{U}$ и $\bar{U}'$ и вектор $\bar{\xi}$, который соединяет их в плоскости R_P и параллельно переносится вдоль $\bar{U}$. Когда есть кручение, он "откручивается" от $\bar{U}'$.

переноса, либо с помощью переноса Ли. Пусть $\bar{\xi}$ перенесён параллельно. Тогда мы получаем из (6.15)

$$(\pounds_{\bar{U}}\bar{\xi})^i = -(\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U})^i - T^i{}_{jk}\xi^j U^k.$$

Однако для исходного вектора $\bar{\xi}$ мы имеем $\nabla_{(S)\,\bar{\xi}}\bar{U} = 0$, иначе говоря, $(\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U})^i = \frac{1}{2}T^i{}_{jk}U^j\xi^k$. Таким образом, в исходной точке

$$(\pounds_{\bar{U}}\bar{\xi})^i = -\frac{1}{2}T^i{}_{jk}\xi^j U^k.$$

Это означает, что при параллельном переносе вдоль построенной нами конгруэнции геодезических векторов $\bar{\xi}$ будет оставаться «прикреплённым» к кривым конгруэнции, если связность *симметрична*. Но если связность не симметрична, он не будет оставаться «прикреплённым». Грубо говоря, под действием кручения вектор $\bar{\xi}$ «вращается» относительно ближайших геодезических. И наоборот: если мы рассматриваем параллельно переносимый вектор $\bar{\xi}$ как определяющий некое «постоянное» направление, то конгруэнция «параллельных» геодезических будет при движении $\bar{\xi}$ «закручиваться» вокруг геодезической «несущей» $\bar{\xi}$. (Нельзя, однако, придать точный смысл словам «вращается» и «закручивается», если нет метрики.)

6.7. НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

В дальнейшем будет удобно использовать систему координат, основанную на геодезических. Чтоб построить её, заметим, что геодезические, проходящие через точку P, задают

1-1-отображение окрестности P на окрестность нуля в T_P. Это отображение строится так: каждый вектор из T_P однозначно определяет геодезическую, проходящую через точку P, и мы можем сопоставить ему точку этой геодезической, находящуюся на расстоянии $\Delta\lambda = 1$ (где λ — аффинный параметр) от точки P. (Напомним, что если два вектора из T_P параллельны, то их геодезические суть совпадающие, но по-разному параметризованные кривые, и, следовательно, построенное отображение «различает» точки на геодезической.) С помощью такого отображения мы можем, выбрав в T_P некоторый базис, определить *нормальные координаты* точки Q как компоненты вектора, связанного с этой точкой. Вообще говоря, это отображение будет взаимно-однозначным лишь в некоторой окрестности P, ибо геодезические на искривлённом многообразии могут пересекаться. Для некоторых связностей, таких как связность плоского пространства, оно будет взаимно-однозначным и на всём многообразии. (Отображение *из* T_P *в* многообразие корректно определено, даже если геодезические пересекаются. Оно называется *экспоненциальным отображением*. Если оно определено для всех элементов T_P во всех точках P, то многообразие называется *геодезически полным*.) Основная ценность нормальных координат для нас связана с тем, что в них $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ в точке P (но не всюду в окрестности P). Чтоб это увидеть, заметим, что если мы рассматриваем геодезическую, определяемую вектором $\bar{U}$ с компонентами $U^i(P)$, то координаты точки на этой геодезической, отвечающей аффинному параметру, равному λ, будут просто $x^i = \lambda U^i(P)$, если мы положили $\lambda = 0$ в P. Таким образом, $d^2x^i/d\lambda^2$ обращаются в нуль, а из (6.16c) видно, что $\Gamma^i{}_{jk}U^k(P)U^j(P)$ должно обращаться в нуль на всей кривой. Однако в точке P направление $\bar{U}$ было произвольным, откуда и следует, что $\Gamma^i{}_{jk}(P) = 0$.

Тот факт, что всегда можно выбрать координатную систему так, чтобы $\Gamma^i{}_{jk}$ обращалась в нуль в некоторой точке, ниже будет нам чрезвычайно полезен при доказательстве нескольких теорем. Поскольку в других точках $\Gamma^i{}_{jk}$ не обязаны обращаться в нуль, то и производные $\Gamma^i{}_{jk}$ в точке P нулю не равны.

6.8. ТЕНЗОР РИМАНА

Можно ожидать, что коммутатор двух ковариантных производных

$$[\nabla_{\bar{U}}, \nabla_{\bar{V}}] \equiv \nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{V}} - \nabla_{\bar{V}}\nabla_{\bar{U}}$$

будет дифференциальным оператором. Однако на самом деле он обладает следующим замечательным свойством: оператор

R, определённый формулой

◆ $$[\nabla_{\bar U}, \nabla_{\bar V}] - \nabla_{[\bar U, \bar V]} \equiv \mathsf{R}(\bar U, \bar V), \tag{6.18}$$

есть *мультипликативный* оператор. Еще более замечательно то, что R также не зависит от производных $\bar U$ и $\bar V$. Эти свойства объясняются и доказываются в следующем упражнении.

Упражнение 6.13. Докажите, что для любой функции f

(a) $\mathsf{R}(\bar U, \bar V) f\bar W = f\mathsf{R}(\bar U, \bar V)\bar W$,

(b) $\mathsf{R}(f\bar U, \bar V)\bar W = f\mathsf{R}(\bar U, \bar V)\bar W$.

Благодаря этим свойствам (6.18) в действительности определяет *тензор*, называемый *тензором Римана.* Из (6.18) видно, что, при заданных векторах $\bar U$ и $\bar V$, $\mathsf{R}(\bar U, \bar V)$ — это тензор типа $\binom{1}{1}$, поскольку, действуя на вектор, левая часть опять-таки даёт вектор. Если считать $\bar U$ и $\bar V$ аргументами, то тензор Римана становится тензором типа $\binom{1}{3}$. (Заметим, что принятое нами определение тензора Римана ((6.18) и (6.19)) отнюдь не является единственно возможным. Используются и другие определения, отличающиеся от нашего знаком или порядком аргументов. Справляясь в других книгах, проверьте, знаете ли вы, какое было использовано определение. Мы следуем Мизнеру, Торну и Уилеру (1977).)

Упражнение 6.14. Компоненты тензора Римана $R^i{}_{jkl}$ определяются формулой

$$[\nabla_i, \nabla_j]\,\bar e_k - \nabla_{[\bar e_i, \bar e_j]}\bar e_k = R^l{}_{kij}\bar e_l. \tag{6.19}$$

(a) покажите, что в *координатном* базисе

◆ $$R^l{}_{kij} = \Gamma^l{}_{kj,i} - \Gamma^l{}_{ki,j} + \Gamma^m{}_{kj}\Gamma^l{}_{mi} - \Gamma^m{}_{ki}\Gamma^l{}_{mj}. \tag{6.20}$$

(b) В некоординатном базисе определим перестановочные коэффициенты $C^i{}_{jk}$ формулой

$$[\bar e_j, \bar e_k] = C^i{}_{jk}\bar e_i. \tag{6.21}$$

Покажите, что

$$R^l{}_{kij} = \Gamma^l{}_{kj,i} - \Gamma^l{}_{ki,j} + \Gamma^m{}_{kj}\Gamma^l{}_{mi} - \Gamma^m{}_{ki}\Gamma^l{}_{mj} - C^m{}_{ij}\Gamma^l{}_{km}, \tag{6.22}$$

где $f_{,i} \equiv \bar e_i[f]$.

(c) Покажите, что

$$R^l{}_{k(ij)} \equiv \frac{1}{2}(R^l{}_{kij} + R^l{}_{kji}) = 0 \tag{6.23a}$$

и

$$R^l{}_{[kij]} = 0. \tag{6.23b}$$

(Указание: для доказательства (6.23b) используйте нормальные координаты; ответ, конечно же, от выбора координат не зависит.)

(d) Используя (c), покажите, что на n-мерном многообразии число линейно-независимых компонент $R^l{}_{kij}$ равно

$$n^4 - n^2 \frac{n(n+1)}{2} - n \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{1}{3} n^2 (n-1). \quad (6.24)$$

Упражнение 6.15. Покажите, что

$$R^l{}_{k\,[i j;\, m]} = 0. \quad (6.25)$$

Эти соотношения называются *тождествами Бьянки.* (Указание: опять работайте в нормальных координатах.) Покажите, что в координатном базисе эти тождества эквивалентны тождествам Якоби для ковариантных производных

$$[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]] + [\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_i]] + [\nabla_k, [\nabla_i, \nabla_j]] = 0.$$

[См. (2.14) и (3.9).]

6.9. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕНЗОРА РИМАНА

Так же, как и при интерпретации другого встречавшегося нам коммутатора, $[\bar{U}, \bar{V}]$, речь пойдёт о замкнутой или почти замкнутой петле. Наши рассуждения основаны на использовании экспонент от ковариантных производных и потому идут практически параллельно тому, что было в случае скобок Ли. Если векторное поле $\bar{A}$ определено вдоль кривой с касательным вектором $\bar{U}$, то параллельный перенос позволяет нам перенести $\bar{A}$ из любой точки кривой Q в любую другую её точку P. Полученный таким образом вектор $\bar{A}(Q \to P)$ из касательного пространства T_P (вообще говоря, не равный $\bar{A}(P)$) назовём образом $\bar{A}(Q)$ в P; он, конечно же, зависит от кривой. Действительно, если $\bar{A}$ и $\bar{U}$ аналитичны, мы можем записать следующий ряд Тейлора:

$$\bar{A}(Q \to P) = \bar{A}(P) + \lambda \nabla_{\bar{U}} \bar{A}(P) + \tfrac{1}{2} \lambda^2 \nabla_{\bar{U}} \nabla_{\bar{U}} \bar{A}(P) + \ldots$$
$$= \exp[\lambda \nabla_{\bar{U}}]\, \bar{A}\,|_P, \quad (6.26)$$

где λ — параметр кривой ($\bar{U} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$), а обозначение «exp» опять всего лишь сокращённая запись предыдущей строки.

Теперь рассмотрим две конгруэнции с касательными векторами $\bar{U} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и $\bar{V} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$, такими что $[\bar{U}, \bar{V}] = 0$. Тогда при пересечении они образуют замкнутые петли (рис. 6.6). Если мы параллельно перенесём вектор из некоторой точки R

вдоль кривой $\bar{V}$ в точку Q, как показано на рисунке, то получим вектор

$$\bar{A}(R \to Q) = \exp[\mu\nabla_{\bar{V}}]\,\bar{A}|_Q,$$

где μ — изменение параметра при переходе от Q к R. Если теперь мы параллельно перенесём полученный вектор из Q в P, то в точке P получим вектор

$$\bar{A}(R \to Q \to P) = \exp[\lambda\nabla_{\bar{U}}]\exp[\mu\nabla_{\bar{V}}]\,\bar{A}|_P,$$

где λ — изменение параметра при переходе от P к Q. Но можно сделать перенос и по другому пути, а именно сначала

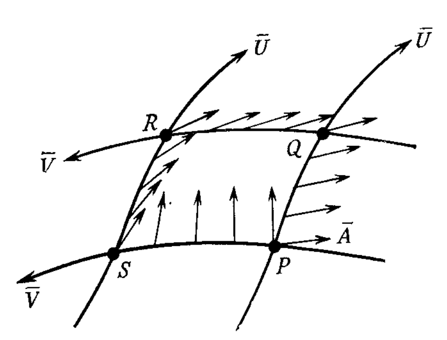


Рис. 6.6. В результате параллельного переноса вокруг замкнутой петли получается вектор, вообще говоря, не совпадающий с исходным.

пойти в точку S («расстояние» λ вдоль $\bar{U}$-кривой), а потом — в P («расстояние» μ вдоль V-кривой). Значения λ и μ будут те же, поскольку $\bar{U}$ и $\bar{V}$ коммутируют. При втором способе получаем

$$\bar{A}(R \to S \to P) = \exp[\mu\nabla_{\bar{V}}]\exp[\lambda\nabla_{\bar{U}}]\,\bar{A}|_P.$$

При малых λ и μ мы можем найти разность $\delta\bar{A}$ векторов, получаемых этими двумя способами, с помощью разложения Тейлора:

$$\delta\bar{A} = \left[e^{\lambda\nabla_{\bar{U}}},\ e^{\mu\nabla_{\bar{V}}}\right]\bar{A}$$

$$= \left[1 + \lambda\nabla_{\bar{U}} + \tfrac{1}{2}\lambda^2\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}},\ 1 + \mu\nabla_{\bar{V}} + \tfrac{1}{2}\mu^2\nabla_{\bar{V}}\nabla_{\bar{V}}\right]\bar{A} + O(3),$$

где через $O(3)$ обозначены члены, имеющие по μ и λ суммарную степень $\geqslant 3$. После некоторых преобразований приходим к равенству

$$\delta\bar{A} = \lambda\mu\left[\nabla_{\bar{U}},\ \nabla_{\bar{V}}\right]\bar{A} + O(3); \qquad (6.27)$$

но это как раз и есть тензор Римана, причём производные от $\bar{A}$ сюда *не* вошли. На $\delta\bar{A}$ можно также смотреть как на изме-

нение $\bar{A}$ при параллельном переносе его вдоль замкнутой петли $PQRSP$. Это изменение как раз и равно значению тензора Римана, умноженному на «площадь» петли, $\lambda\mu$:

$$\delta A^i = \lambda\mu R^i{}_{jkl} A^j U^k V^l.$$

Другой существенный для геометрии аспект тензора Римана связан с *девиацией геодезических*, т. е. с тем фактом, что геодезические, бывшие в начале параллельными, теряют в дальнейшем это свойство. Чтоб измерить этот эффект, рассмотрим конгруэнцию геодезических с касательным вектором $\bar{U}$ $(\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0)$ и соединяющий кривые конгруэнции вектор $\bar{\xi}$, который перемещается по кривым с помощью переноса Ли $(\pounds_{\bar{U}}\bar{\xi} = 0)$ (см. рис. 6.7). Мерой девиации геодезических будет служить изменение вектора $\bar{\xi}$. Его первая производная $\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi}$ зависит от начальных условий, от того, параллельны исходные геодезические или нет. Геометрия сидит во второй производной $\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi}$, которая говорит, как меняется исходная степень разделения геодезических. Итак, мы имеем

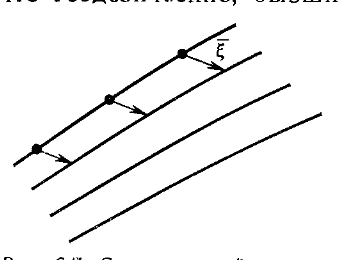


Рис. 6.7. Соединяющий кривые конгруэнции геодезических вектор $\bar{\xi}$ ли-переносится вдоль конгруэнции.

$$\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi} = \nabla_{\bar{U}}(\pounds_{\bar{U}}\bar{\xi} + \nabla_{\bar{\xi}}\bar{U}) = \nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U} = [\nabla_{\bar{U}}, \nabla_{\bar{\xi}}]\bar{U} + \nabla_{\bar{\xi}}\nabla_{\bar{U}}\bar{U}.$$

На первом шаге использовано упр. 6.11. Последний член в правой части обращается в нуль, поскольку $\bar{U}$ — геодезическая, и мы получаем

$$\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi} = R(\bar{U}, \bar{\xi})\bar{U}, \tag{6.28a}$$

или в компонентах

$$(\xi^i{}_{;j}U^j)_{;k}U^k = R^i{}_{jkl}\bar{U}^j\bar{U}^k\xi^l.$$

Заметим, что левую часть можно упростить, поскольку $U^j{}_{;k}U^k = 0$; это даёт

$$\xi^i{}_{;j;k}U^jU^k = R^i{}_{jkl}U^jU^k\xi^l. \tag{6.28b}$$

Уравнение (6.28) называется уравнением *девиации геодезических*.

6.10. ПЛОСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Аксиома Эвклида о параллельных служит определяющей аксиомой *плоского* пространства. Как ясно из (6.28), пространство плоско тогда и только тогда, когда его тензор Римана равен нулю. Таким образом, тензор Римана есть мера *кривизны* многообразия со связностью. В плоском пространстве, как следует из (6.27), есть *глобальное* понятие параллельности: можно говорить, что вектор в точке P параллелен вектору в точке Q, ибо его можно параллельно перенести в Q способом, не зависящим от пути. Поэтому в плоском пространстве можно отождествить все касательные пространства T_P. Более того, экспоненциальное отображение можно продолжать бесконечно (при условии, что глобальная топология многообразия не усложнена искусственно «резкой» и «склейкой») и всё многообразие можно отождествить с его касательным пространством. Обратите внимание, что метрический тензор во всём этом не участвует. Пространство Минковского так же плоско, как и эвклидово пространство.

Упражнение 6.16. Рассмотрим двумерное плоское пространство с декартовыми координатами x, y и полярными координатами r, θ.

(a) Используя то, что векторы $\bar{e}_x$ и $\bar{e}_y$ параллельны сами себе глобально (для любых P и Q вектор $\bar{e}_x(P)$ параллелен вектору $\bar{e}_x(Q)$), покажите, что

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = 1/r,$$

а все остальные Γ в полярных координатах равны нулю.

(b) Для произвольного векторного поля $\bar{V}$ выразите $\nabla_i V^j$ и $\nabla_i V^i$ для случая полярных координат через V^r и V^θ.

(c) Для базиса $\hat{\mathbf{r}} \equiv \partial/\partial r$, $\hat{\theta} \equiv (1/r)\partial/\partial\theta$ найдите все символы Кристоффеля.

(d) Выполните задание (b) для базиса из (c).

Это упражнение устанавливает следующий важный факт: хотя на плоском многообразии существуют системы координат, в которых $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ повсюду, можно выбрать координаты, в которых они *ненулевые*.

6.11. СОГЛАСОВАННОСТЬ СВЯЗНОСТИ С ОБЪЁМОМ ИЛИ МЕТРИКОЙ

Если на многообразии помимо связности задана ещё форма объёма или метрика, то, как правило, на неё налагаются некоторые дополнительные ограничения. Например, как связность, так и форма объёма могут задавать дивергенцию векторного поля $\bar{V}$. *Ковариантная дивергенция* — это $\nabla\cdot\bar{V} \equiv \nabla_i V^i$,

а дивергенция относительно формы объёма определяется формулой

$$\pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega} = (\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V})\,\tilde{\omega}.$$

Мы говорим, что ∇ и $\tilde{\omega}$ *согласованы*, если $\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V} = \nabla \cdot \bar{V}$ для всех $\bar{V}$.

Упражнение 6.17. (a) Покажите, что ∇ и $\tilde{\omega}$ согласованы тогда и только тогда, когда $\nabla\tilde{\omega} = 0$. (Указание: для вычисления $\pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ используйте упр. 6.11.)

(b) Предположим, что $\omega_{12\ldots n} = f$ в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$. Покажите, что ∇ и $\tilde{\omega}$ согласованы тогда и только тогда, когда для всех k

$$(\ln f)_{,k} = \Gamma^{j}{}_{jk}.$$

Аналогично если на многообразии задан метрический тензор, то имеется естественное требование согласованности. А именно, для любых двух векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$ в точке P определено скалярное произведение $\mathrm{g}(\bar{A}, \bar{B})$. Мы говорим, что ∇ и g *согласованы*, если это скалярное произведение сохраняется при параллельном переносе $\bar{A}$ и $\bar{B}$ вдоль каждой кривой.

Упражнение 6.18. (a) Покажите, что ∇ и g согласованы тогда и только тогда, когда

$$\nabla\mathrm{g} = 0. \qquad (6.29)$$

(b) Покажите, что в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ условие согласованности имеет вид

$$\Gamma^{i}{}_{jk} = \tfrac{1}{2} g^{il}\,(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}). \qquad (6.30)$$

Здесь g^{ij} — элементы обратной к g_{lm} матрицы (см. (2.55)). (Указание: используйте симметрию $\Gamma^{i}{}_{jk} = \Gamma^{i}{}_{kj}$.)

Упражнение 6.19. Напомним (см. упр. 4.13), что, когда имеется метрика, можно определить выделенную форму объёма. (Это ещё один вид согласованности, на этот раз метрики и формы объёма.) Покажите, что если метрика и связность согласованы, то выделенная форма объёма и связность тоже согласованы. (Указание: надо убедиться в том, что $g_{,k} = g^{ji}g_{ij,k}$; для этого используйте (4.19).)

Равенство (6.30) выявляет тот замечательный факт, что метрика однозначно определяет согласованную с ней связность. Такая связность называется *метрической связностью.*

Упражнение 6.20. Покажите, что для произвольного вектора $\bar{V}$

$$(\pounds_{\bar{V}}\mathrm{g})_{ij} = \nabla_i\bar{V}_j + \nabla_j\bar{V}_i.$$

Следовательно, вектор Киллинга (см. § 3.11) удовлетворяет *уравнению Киллинга*

$$\nabla_i \bar{V}_j + \nabla_j \bar{V}_i = 0.$$

Ср. с уравнением (5.89).

6.12. МЕТРИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

Поскольку (6.30) налагает на связность жесткие ограничения, метрическая связность обладает дополнительными свойствами, которых у произвольной симметричной связности нет. Вывести некоторые из этих свойств проще всего в нормальных координатах. Заметим, что из (6.29) и (6.30) следует, что

$$\Gamma^i{}_{jk} = 0 \text{ в точке } P \Leftrightarrow g_{lm,\,n} = 0 \text{ в точке } P. \tag{6.31}$$

Упражнение 6.21. Покажите, что из (6.20), (6.30) и (6.31) вытекает, что в нормальных координатах в точке P

$$R_{ijkl} \equiv g_{im} R^m{}_{jkl} = \tfrac{1}{2}\left(g_{il,\,jk} - g_{ik,\,jl} + g_{jk,\,il} - g_{jl,\,ik}\right). \tag{6.32}$$

Упражнение 6.22. (a) Покажите, что из (6.32) следует тождество

$$R_{ijkl} = R_{klij}. \tag{6.33}$$

(b) Покажите, что из (6.33) и (6.23) следует, что на n-мерном многообразии число линейно-независимых компонент R_{ijkl} равно

$$\frac{1}{8} n(n-1)(n^2-n+2) - \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) = \\ = \frac{1}{12} n^2(n^2-1).$$

Упражнение 6.23. (a) Определим тензор R_{kl}, называемый *тензором Риччи*, формулой

$$R_{kl} = R^i{}_{kil} \tag{6.34}$$

и скалярную кривизну формулой

$$R = g^{kl} R_{kl}. \tag{6.35}$$

Покажите, что тензор R_{ij} *симметричен.*

(b) Покажите, что из свёрнутых тождеств Бьянки

$$R^i{}_{j[il;m]} = 0 \quad \text{и} \quad g^{jl} R^i{}_{j[il;m]} = 0$$

следует, что

$$\left(R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij}\right)_{;\,j} = 0. \tag{6.36}$$

(Индексы у R^{ij} поднимаются с помощью метрики: $R^{ij} = g^{il}g^{jm}R_{lm}$.)

(c) Определим *тензор Вейля* формулой

$$C^{ij}{}_{kl} = R^{ij}{}_{kl} - 2\delta^{[i}{}_{[k}R^{j]}{}_{l]} + \frac{1}{3}\delta^{[i}{}_{[k}\delta^{j]}{}_{l]}R. \qquad (6.37)$$

Покажите, что любая свёртка C_{ijkl} по индексам даёт нуль — это «чистый» тензор четвёртого ранга.

Равенство (6.36) играет важную роль в эйнштейновой теории гравитации — общей теории относительности. Пространство-время в этой теории есть обобщение плоского пространства Минковского — четырёхмерное многообразие с метрикой. Гравитационное поле (т. е. метрика) в пустом пространстве (без материи) находится как решение дифференциальных уравнений

$$G^{ij} \equiv R^{ij} - \frac{1}{2}Rg^{ij} = 0. \qquad (6.38)$$

Тензор G^{ij} называется *тензором Эйнштейна*. Тождества (6.36) понижают число независимых уравнений в (6.38) от 10 $\left(= \frac{1}{2}n(n-1)\right.$, поскольку G^{ij} симметричен) до 6. Это гарантирует, что решение g_{ij}, тоже имеющее 10 независимых компонент, определяется с точностью до четырёх функциональных степеней свободы, которым в свою очередь соответствуют координатные преобразования g_{ij}.

Упражнение 6.24. Покажите, что соединяющая точки P и Q геодезическая есть кривая экстремальной длины среди всех кривых, соединяющих эти точки. А именно, покажите, что с точностью до первого порядка

$$\int_P^Q \left| \mathrm{g}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\lambda}, \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\right|^{1/2} d\lambda$$

не меняется при отклонениях $x^i(\lambda)$ от геодезической. (Имейте в виду, что параметр каждой кривой определяется однозначно; параметр геодезической должен быть аффинным.) Обдумайте вопрос о необходимости знака модуля в случае индефинитной метрики и отдельно обдумайте случай нулевой геодезической (геодезической нулевой длины).

6.13. АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Мы все обучались основам физики и геометрии, изучая плоские многообразия: эвклидово трёхмерное пространство, галилеево пространство-время (хотя, возможно, его так и не

называли), а потом (если довелось) пространство-время Минковского. С другой стороны, общая теория относительности использует искривлённое пространство-время, и кажется естественным представлять себе плоское пространство как простейший вид пространств. Но с точки зрения теории многообразий даже плоское пространство вовсе не просто: по сравнению с обычным дифференцируемым многообразием оно имеет гораздо более богатую структуру, ибо на нём задана аффинная связность. В элементарной геометрии и физике присутствие этой связности не ощущается, поскольку, как правило, применяют прямоугольные системы координат, в которых символы Кристоффеля обращаются в нуль. Однако, если физические законы сформулированы в плоском пространстве на языке криволинейных координат, в которых символы Кристоффеля уже придётся использовать, связность становится наблюдаемой.

На первый взгляд это ненужное усложнение, но посмотрим, какие в нём содержатся возможности для обобщений. В большинство так записанных физических законов входят символы Кристоффеля, а не тензор Римана, следовательно, их уравнения осмыслены и выглядят одинаково вне зависимости от того, плоско наше многообразие или криво. Таким образом, естественно постулировать, что математическая форма физических законов в искривлённом пространстве-времени общей теории относительности в точности та же, что и в криволинейных координатах плоского пространства Минковского. Такой постулат называется *принципом минимальной связи* (физических полей с кривизной пространства-времени) или *сильным принципом эквивалентности.* Это широко принятый постулат, который согласуется с экспериментом. Подробно он обсуждается в книге Мизнера и др. (1977). Здесь же стоит подчеркнуть то весьма замечательное обстоятельство, что, записывая «плоские» физические законы в криволинейной системе координат, мы находим их вид в искривлённом пространстве. Это обстоятельство объясняется тем, что плоские пространства, хотя у них и нулевая кривизна, имеют вполне определённую связность, а потому являются просто частным случаем искривлённого пространства.

6.14. СВЯЗНОСТИ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Под названием «калибровочные теории» объединяется целое множество разнообразных теорий взаимодействия элементарных частиц. Все они обладают одним общим свойством: их физические предсказания инвариантны относительно группы преобразований основных полевых переменных. Наиболее известный пример — это теория электромагнетизма: если вы-

брать в качестве основной переменной один-форму («вектор») потенциала $\tilde{A}$, то физические предсказания теории инвариантны относительно калибровочных преобразований $\tilde{A} \to \tilde{A} + \tilde{d}f$. Общее обсуждение калибровочных теорий выходит за рамки этой книги (см. Trautman, 1973), и мы ограничимся здесь электродинамикой, поясняя всё на примере уравнения движения заряженной бесспиновой частицы массы m. Мы увидим, что естественно появится связность, другая, но играющая ту же роль, что и аффинная, и эта связность приведёт нас к «открытию» электромагнитного поля!

Сначала рассмотрим нейтральную скалярную частицу массы m, волновая функция которой ψ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона и (сохраняющемуся) условию нормировки:

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu - m^2)\psi = 0, \qquad \int d^3x\,(\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*) = 1, \tag{6.39}$$

где греческие индексы пробегают (t, x, y, z); мы предположили для простоты, что взята метрика Минковского. Очевидно, что если ψ — решение, то и $\psi e^{i\varphi}$, где φ — произвольное вещественное число, тоже будет решением. Таким образом, $\psi \to \psi e^{i\varphi}$ — калибровочное преобразование. Теперь проведём аналогию, которой будем пользоваться на протяжении всего последующего обсуждения. Наши калибровочные преобразования чрезвычайно ограниченны, поскольку φ не может зависеть от точки. Это похоже на инвариантность относительно выбора координат при описании некоторых (всех) физических систем в прямоугольных координатах специальной теории относительности. Допустимые координатные преобразования — это вращения, лоренцевы бусты и трансляции, и все они «жёсткие»: нельзя в одной точке выполнять одно преобразование, а в другой — другое. Ослабление этого ограничения, необходимое, если мы хотим использовать произвольные системы координат, заставляет нас, как мы видели в предыдущем параграфе, ввести аффинную связность, — иначе мы не сможем определить не зависящую от выбора координат ковариантную производную. Но если уж уравнения движения физической системы записаны в терминах связности, то естественно использовать их и тогда, когда связность уже не является плоской. И они оказываются подходящими уравнениями для рассматриваемых систем в *общей* теории относительности. Итак, методика, основанная на использовании свободы в выборе системы координат, привела нас к теории, описывающей, как система взаимодействует с гравитационным полем. Подобным же образом мы увеличим теперь калибровочную свободу поля ψ — и автоматически придём к теории, описывающей, как гравитационное поле взаимодействует с электромагнитным полем.

Обобщение очевидно: нам нужны калибровочные преобразования общего вида

$$\psi \to \psi e^{i\varphi(\bar{x})}, \tag{6.40}$$

где теперь φ — произвольная функция точки $\bar{x}$ в пространстве Минковского. Но поскольку в уравнения поля входят производные, мы получаем

$$\tilde{d}\psi \to (\tilde{d}\psi + i\psi\tilde{d}\varphi)\, e^{i\varphi(\bar{x})}. \tag{6.41}$$

Для того чтоб понять, как избавиться от лишнего члена, посмотрим на дело более геометрически. Множитель $e^{i\varphi}$ — это комплексное число на единичной окружности; калибровочное преобразование — это представление группы $U(1)$ (унитарной группы в одномерном комплексном пространстве) её действием на ψ. Поэтому преобразование $\psi \to \psi e^{i\varphi(\bar{x})}$ можно представлять себе так: в каждой точке $\bar{x}$ выбирается элемент из $U(1)$ и действует на ψ. Геометрический объект, отвечающий этой картине, — это *расслоение*, причём пространство Минковского играет роль базы, а группа $U(1)$ — слоя (его можно представлять в виде единичной окружности на комплексной плоскости). Тогда калибровочные преобразования (6.40) будут сечениями этого расслоения, которое мы назовём $U(1)$*-расслоением.*

Объект, которым мы теперь хотим заняться, — это не сама ψ, а $\nabla_\mu\psi$ — элемент из T^*_P, векторного пространства один-форм в точке P. Рассмотрим на базе кривую $\mathscr{C}$ с параметром λ. Двигаясь по кривой, мы последовательно встречаемся с один-формами $\tilde{d}\psi$, по одной в каждой точке. Если ψ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (6.39), то мы будем говорить, что $\tilde{d}\psi$ меняется вдоль $\mathscr{C}$ «правильным» образом. У нас есть ограниченный набор калибровочных преобразований ($\varphi = \text{const}$), для которых новая форма $\tilde{d}\psi$ тоже «правильная». Но представим себе, что мы сделали произвольное калибровочное преобразование. Тогда кривой $\mathscr{C}$ на базе соответствует кривая $\mathscr{C}^*$ в $U(1)$-расслоении: в каждом слое, лежащем над точкой $\bar{x}$ кривой $\mathscr{C}$, она проходит через элемент $e^{i\varphi(\bar{x})}$. Если преобразование не постоянно (если $\mathscr{C}^*$ не «параллельна» $\mathscr{C}$), то градиент преобразованной ψ не будет «правильным»: он не будет равен градиенту исходной ψ с точностью до фазы. Поэтому мы определим на базе *один-форму связности* $\tilde{A}$, зависящую от кривой $\mathscr{C}^*$ таким образом, чтобы это «исправило» производную ψ. Определение будет следующее:

(i) Если ψ — решение (6.39), то $\tilde{A} = 0$.

(ii) При преобразовании $\psi \to \psi e^{i\varphi(\bar{x})}$ один-форма связности преобразуется по правилу

$$\tilde{A} \to \tilde{A} + \tilde{d}\varphi. \qquad (6.42)$$

(iii) *Калибровочно-ковариантная производная* ψ определяется формулой

$$\tilde{D}\psi = \tilde{d}\psi - i\psi\tilde{A}. \qquad (6.43)$$

Свойства (ii) и (iii) означают, что при калибровочном преобразовании $\tilde{D}\psi$ переходит в $e^{i\varphi(\bar{x})}\tilde{D}\psi$; свойство (i) гарантирует, что $\tilde{D}\psi$ «правильна» на $\mathscr{C}$.

Теперь поймём, почему $\tilde{A}$ называется связностью. *Аффинную* связность представляют символы Кристоффеля, которые мы добавляем к обычной частной производной, чтоб получить «правильную» производную — производную, задающую параллельный перенос (ср. (6.43) с (6.10)). Чтобы эта «правильность» производной сохранялась, символы Кристоффеля должны преобразовываться при замене координат специальным образом (упр. 6.2), и формулы перехода очень похожи на то, как меняется $\tilde{A}$ при калибровочном преобразовании (6.42). Различаются эти связности тем, что́ они призваны сохранять: аффинная связность сохраняет параллельность, наша один-форма связности сохраняет градиент при калибровочных преобразованиях.

Теперь мы можем записать уравнение Клейна — Гордона в калибровочно-ковариантном виде:

$$D_\mu D^\mu\psi - m^2\psi = (\nabla_\mu - iA_\mu)(\nabla^\mu - iA^\mu)\psi - m^2\psi = 0. \qquad (6.44)$$

Если фаза ψ «правильна», то она превращается в обычное уравнение Клейна — Гордона, и любая ψ, полученная из «правильной» калибровочным преобразованием, тоже будет решением (6.44).

Задав какую-либо систему координат, мы можем определить тензор кривизны формулой, похожей на (6.18):

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} V^\beta.$$

Её аналогом для нашего случая будет

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = F_{\mu\nu}\psi. \qquad (6.45)$$

Прямое вычисление показывает, что *калибровочная два-форма кривизны* $\tilde{F}$, имеющая компоненты $F_{\mu\nu}$, — это просто

$$\tilde{F} = -i d\tilde{A}. \qquad (6.46)$$

Очевидно, $\tilde{F}$ *калибровочно-инвариантна* (см. (ii) выше). (Тензор Римана был координатно-инвариантным.) Уравнение

Клейна — Гордона *калибровочно-плоско* ($\tilde{F}=0$), поскольку существует калибровка с $\tilde{A}=0$. Но поскольку есть явная аналогия с электромагнетизмом ($\tilde{A}$ = один-форма потенциала, $\mathrm{i}\tilde{F}$ = тензор Фарадея, см. гл. 5), естественно попытаться посмотреть на (6.44) как на обобщение уравнения Клейна — Гордона на случай заряженной частицы, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем $\tilde{F}$. Такая гипотеза и в самом деле верна, и (6.44) можно прямо вывести из того факта, что канонический импульс классической частицы во внешнем электромагнитном поле равен $\bar{p}_c = \bar{p} + (q/c)\bar{A}$, где $\bar{p}$ — «настоящий» 4-импульс частицы. В силу принципа соответствия уравнение $\bar{p}\cdot\bar{p}+m^2=0$ переходит (в системе единиц с $\hbar = c = 1$) в уравнение

$$(-\mathrm{i}\nabla_\mu - qA_\mu)(-\mathrm{i}\nabla^\mu - qA^\mu) + m^2\psi = 0;$$

отсюда мы видим, что (6.44) действительно есть волновое уравнение для такой частицы с зарядом $q=1$. Всё вышесказанное можно подытожить следующим образом: скалярная частица с массой m и зарядом q, находящаяся во внешнем электромагнитном поле с один-формой потенциала $\tilde{A}$, подчиняется уравнению

$$(\nabla_\mu - \mathrm{i}qA_\mu)(\nabla^\mu - \mathrm{i}qA^\mu)\psi - m^2\psi = 0. \qquad (6.47)$$

Калибровочные преобразования состоят в следующем:

$$\tilde{A} \to \tilde{A} + \tilde{d}\varphi, \qquad (6.48a)$$

$$\psi \to \psi e^{\mathrm{i}\varphi/q}. \qquad (6.48b)$$

Один-форму $\tilde{A}$ можно рассматривать как связность на $U(1)$-расслоении, а $\tilde{F}$ — как её кривизну.

Упражнение 6.25. (a) Проверьте, что $\tilde{D}\psi \to e^{\mathrm{i}\varphi(x)}\tilde{D}\psi$ при калибровочном преобразовании.

(b) Проверьте (6.46).

6.15. БИБЛИОГРАФИЯ

Весьма полное руководство по римановой геометрии — двухтомная монография Ш. Кобаяси и К. Номидзу «Основы дифференциальной геометрии» (М.: Наука, 1981).

Хорошее современное введение в псевдориманову геометрию (метрическая связность для случая индефинитной метрики) можно найти в книгах: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация (М.: Мир, 1977); The Large-Scale Structure of Space-Time, S. W. Hawking & G. F. R. Ellis (Cambridge University Press, 1973); Вейнберг С. Гравитация и космология (М.: Мир, 1975).

Более полное описание роли связностей в калибровочных теориях имеется в статье A. Trautman, Infinitesimal connections in physics, *in*: Proceedings of the International Symposium on New Mathematical Methods in Physics, ed. K. Bleuler & A. Reetz (Bonn, 1973). См. также R. Hermann, Vector Bundles in Mathematical Physics, в 2-х томах (Benjamin, Reading,

Mass., 1970). По поводу «физического» описания калибровочных теорий см. J. C. Taylor, Gauge Theories of the Weak Interactions (Cambridge University Press, 1976). Математическое обсуждение связностей, понимаемых в более широком смысле, можно найти в книге Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette & M. Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds, and Physics (North-Holland, Amsterdam, 1977). Связности на расслоенных пространствах рассматриваются в статье B. Carter, Underlying mathematical structures of classical gravitation theory, *in:* Recent Developments in Gravitation, ed. M. Levy & S. Deser (Plenum, New York, 1979).

Введение аффинной связности на многообразии вызывает к жизни множество других тем для исследования. Например, на группах Ли имеется *естественная аффинная связность, превращающая однопараметрические* подгруппы в геодезические группового многообразия. Эта конструкция изучается шаг за шагом в виде последовательности упражнений в указанной выше книге Мизнера и др.

То что кручение может играть роль в гравитации, впервые было замечено Картаном. Однако значительное внимание теория гравитации Эйнштейна — Картана привлекла лишь позднее; см. A. Trautman, Bull. de l'Academie Polonaises des Sciences (math., astr., phys.) 20, 185—190 (1972).

Тензор Римана не так просто вычислить по заданным компонентам метрического тензора. Задача упрощается, если использовать метод подвижных реперов Картана, использующий исчисление дифференциальных форм; см. снова книгу Мизнера и др.

Хотя мы вовсе не рассматривали дифференциальную геометрию на комплексных многообразиях, она интересна и может в будущем сыграть существенную роль в физических приложениях. Введение в неё, рассчитанное на физиков, дано в книге E. J. Flahery, Hermitian and Kählerian Geometry in Relativity (Springer, Berlin, 1976); стандартное чисто математическое руководство — S. S. Chern, Complex Manifolds Without Potential Theory (D. Van Nostrand, New York, 1967).

ПРИЛОЖЕНИЕ. РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К НЕКОТОРЫМ УПРАЖНЕНИЯМ

2.1. $[\hat{\mathrm{r}}, \hat{\theta}] = -\hat{\theta}/r \neq 0$.

2.2. (b) Поскольку $a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda + \mathrm{bd}/\mathrm{d}\mu = \mathrm{bd}/\mathrm{d}\mu + a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$, то из (2.13) следует, что $\exp[a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda]\exp[\mathrm{bd}/\mathrm{d}\mu] = \exp[\mathrm{bd}/\mathrm{d}\mu]\exp[a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda]$, откуда получаем $[\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu] = 0$. И наоборот, если порядок $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ в правой части (2.13) роли не играет, то с ними можно обращаться как с простыми числами, для которых (2.13) выполнено.

2.3. Разверните каждое слагаемое (например, $[[\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}] = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} - \bar{Y}\bar{X}\bar{Z} - \bar{Z}\bar{X}\bar{Y} + \bar{Z}\bar{Y}\bar{X}$). Каждый член этого разложения — дифференциальный оператор на функциях. Условие принадлежности классу C^2 гарантирует, что каждый член разложения существует. После того как все слагаемые в (2.14) так разложены, результат становится очевиден.

2.4. Чтобы получить из матрицы, являющейся тензором типа $\binom{1}{1}$, число, нужны один вектор и одна один-форма. Поскольку у нас в деле участвуют две матрицы, то, чтобы связать с преобразованием число, нужны два вектора и две один-формы. Линейность проверяется легко.

2.5. В случае размерности n у тензора типа $\binom{2}{0}$ имеется n^2 независимых компонент, а у пары векторов — всего лишь $2n$ компонент. Вообще говоря, этого недостаточно.

2.6. Линейная комбинация двух тензоров типа $\binom{2}{0}$ определяется своими значениями на двух произвольных один-формах: $(\alpha\mathrm{h} + \beta\mathrm{r})(\tilde{p}, \tilde{q}) = \alpha\mathrm{h}(\tilde{p}, \tilde{q}) + \beta\mathrm{r}(\tilde{p}, \tilde{q})$. Она является линейной функцией от $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$, а следовательно, $\binom{2}{0}$-тензором. Нулевой тензор равен нулю на любых двух $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$, и все аксиомы векторного пространства, очевидно, выполняются. Наше пространство имеет размерность n^2, поскольку любой тензор полностью определяется своими компонентами $\mathrm{h}(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j) = h^{ij}$. Тензоры $\{\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j\}$ (их n^2 штук) образуют ба-

зис, поскольку они линейно-независимы: линейная комбинация $\beta^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда все β^{ij} — нули, что легко увидеть, подействовав этим тензором на всевозможные пары базисных один-форм. На самом деле, как нетрудно проверить, $\mathsf{h} = h^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$.

2.7. Шесть. Шесть.

2.8. Линейность: $\mathsf{C}(a\bar{V}+b\bar{W}) = \mathsf{B}(\mathsf{A}(a\bar{V}+b\bar{W})) = \mathsf{B}(a\mathsf{A}(\bar{V}) + b\mathsf{A}(\bar{W})) = a\mathsf{B}(\mathsf{A}(\bar{V})) + b\mathsf{B}(\mathsf{A}(\bar{W})) = a\mathsf{C}(\bar{V}) + b\mathsf{C}(\bar{W})$.

Компоненты: если $\mathsf{A}(\bar{e}_j) = A^k{}_j\bar{e}_k$, то $\mathsf{C}(\bar{e}_j) = \mathsf{B}(\mathsf{A}^k{}_j\bar{e}_k) = \mathsf{B}(\bar{e}_k)\,\mathsf{A}^k{}_j = B^i{}_kA^k{}_j\bar{e}_i$, откуда и следует ответ.

Каждый $\binom{1}{1}$-тензор — это линейное преобразование в T_P. Из полученного результата видно, что линейные преобразования образуют группу относительно операции композиции (с помощью которой мы получили C из A и B).

2.9. $\mathsf{T}(\tilde{\omega}^{i'}, \tilde{\omega}^{j'}) = \mathsf{T}(\Lambda^{i'}{}_k\tilde{\omega}^k, \Lambda^{j'}{}_l\tilde{\omega}^l) = \Lambda^{i'}{}_k\Lambda^{j'}{}_l\mathsf{T}(\tilde{\omega}^k, \tilde{\omega}^l)$. На случай N индексов ($i' \dots j'$) и N'индексов ($k' \dots l'$) это обобщается так: $\mathsf{T}^{i' \cdots j'}{}_{k' \dots l'} = \Lambda^{i'}{}_r \dots \Lambda^{j'}{}_s\Lambda^t{}_{k'} \dots \Lambda^u{}_{l'}T^{r \dots s}{}_{t \dots u}$.

2.10. Это верно для любого векторного пространства: нулевой элемент определяется однозначно.

2.11. Значение нашего «тензора» (в исходном базисе) на один-форме $\tilde{p}$ и векторе $\bar{V}$ есть $A^i{}_jV^jP_i$. В новом же базисе, используя новые компоненты для всех величин, мы получаем: $A^{i'}{}_{j'}V^{j'}P_{i'} = (\Lambda^{i'}{}_r\Lambda^s{}_{j'}A^r{}_s)(\Lambda^{j'}{}_kV^k)(\Lambda^l{}_{i'}P_l)$. Просуммировав по i' и j', а затем использовав (2.34), мы получим старый ответ. Таким образом, наше правило сопоставляет вектору и один-форме вещественное число, не зависящее от выбора базиса.

2.12.

(a) $\Lambda = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ приводит к каноническому виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\Lambda = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ приводит к каноническому виду $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ приводит к каноническому виду $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.13. (a) Закон преобразования можно получить из (2.55). Как функция от один-форм g удовлетворяет равенству $\mathsf{g}^{-1}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \mathsf{g}(\tilde{p}, \tilde{q})$, откуда следуют (2.55) и, очевидным образом, свойство линейности.

(b) В таком базисе метрика имеет компоненты $\pm\delta_{ij}$, следовательно, обратная матрица g^{-1} имеет те же компоненты $\pm\delta^{ij}$.

2.14. Разложите g_{ij} и $\Lambda^i{}_{j'}$ в ряд Тэйлора в точке P. Попытайтесь удовлетворить (i) и (ii), подобрав по произвольным коэффициентам разложения g_{ij} соответствующие коэффициенты разложения $\Lambda^i{}_{j'}$. Подсчётом числа коэффициентов покажите, что (i)—(iii) имеют место. Обратите внимание на то, что не все $\partial\Lambda^i{}_{j'}/\partial x^{k'}$ в точке P независимы, поскольку из $\Lambda^i{}_{j'} = \partial x^i/\partial x^{j'}$ следует, что $\partial\Lambda^i{}_{j'}/\partial x^{k'} = \partial\Lambda^i{}_{k'}/\partial x^{j'}$.

2.15. (a) $g_{rr} = 1$, $g_{r\theta} = 0$, $g_{\theta\theta} = r^2$.

(b) Базис ортонормирован; $\hat{\mathbf{r}} = \partial/\partial r$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = r^{-1}\partial/\partial\theta$.

2.16. (a) $\tilde{\mathrm{d}}f$ имеет компоненты $(\partial f/\partial r, \partial f/\partial\theta)$, $\bar{\mathrm{d}}f$ имеет компоненты $(\partial f/\partial r, r^{-2}\partial f/\partial\theta)$.

(b) В этом ортонормированном базисе и $\tilde{\mathrm{d}}f$ и $\bar{\mathrm{d}}f$ имеют компоненты $(\partial f/\partial r, r^{-1}\partial f/\partial\theta)$.

3.1. (a) В случае функций из (3.3) следует, что в обеих частях (3.8) стоит оператор $[\bar{V}, \bar{W}]$. В случае векторного поля $\bar{U}$ из (3.6) следует, что левая часть имеет вид $[\bar{V}, [\bar{W}, \bar{U}]] - [\bar{W}, [\bar{V}, \bar{U}]]$, а правая часть равна $[[\bar{V}, \bar{W}], \bar{U}]$. Наш результат следует теперь из тождества Якоби (упр. 2.3) и антисимметричности скобок Ли.

(b) В случае функций опять используем тождество Якоби (2.14). В случае векторов тождество (3.8) превращает (3.9) в производную Ли по направлению нулевого вектора $[[\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}] + [[\bar{Y}, \bar{Z}], \bar{X}] + [[\bar{Z}, \bar{X}], \bar{Y}]$.

3.2. (b) $\pounds_{\bar{V}}\bar{U} = \pounds_{\bar{V}}(U^i\bar{e}_i) = (\pounds_{\bar{V}}U^i)\,\bar{e}_i + U^i\pounds_{\bar{V}}\bar{e}_i =$

$$[V^j\bar{e}_j(U^i)]\,\bar{e}_i - \bar{U}^i\pounds_{\bar{e}_i}(V^j\bar{e}_j) = [V^j\bar{e}_j(U^i) - U^j\bar{e}_jV^i]\,\bar{e}_i - U^kV^j\pounds_{\bar{e}_k}\bar{e}_j.$$

Последний шаг требует переобозначения индексов. Используя (3.7) в последнем слагаемом, получаем требуемый ответ.

3.3. Это следует из (2.7) при $V^i = \delta^i{}_1$.

3.4. Из (3.13) получаем

$$(\pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega})_i\,W^i = V^j\frac{\partial}{\partial x^j}(\omega_i W^i) - \omega_i\left(V^j\frac{\partial}{\partial x^j}W^i - W^j\frac{\partial}{\partial x^j}V^i\right)$$

$$= \left(V^j\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_i + \omega_j\frac{\partial}{\partial x^i}V^j\right)W^i,$$

где индексы во втором слагаемом переобозначены. Ответ следует из произвольности W^i.

3.5. (a) $$\Big[\sum_a \alpha_{(a)}\bar{A}_{(a)},\ \sum_b \beta_{(b)}\bar{A}_{(b)}\Big] = \sum_{a,\,b}\big[\alpha_{(a)}\bar{A}_{(a)},\ \beta_{(b)}\bar{A}_{(b)}\big]$$
$$= \sum_{a,\,b}\{\alpha_{(a)}\beta_{(b)}\,[\bar{A}_{(a)},\ A_{(b)}] + \alpha_{(a)}\,[\bar{A}_{(a)}(\beta_{(b)})]\,\bar{A}_{(b)} - \beta_{(b)}\,[\bar{A}_{(b)}(\alpha_{(a)})]\,\bar{A}_{(a)}\}.$$

3.6. $$(\pounds_{\bar{V}}\mathsf{T})^{i\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,l} = V^r\frac{\partial}{\partial x^r}T^{i\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,l} - T^{r\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,l}\frac{\partial}{\partial x^r}V^i - \dots - T^{i\,\dots\,r}{}_{k\,\dots\,l}\frac{\partial}{\partial x^r}V^j + T^{i\,\dots\,j}{}_{r\,\dots\,l}\frac{\partial}{\partial x^k}V^r + \dots + T^{i\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,r}\frac{\partial}{\partial x^l}V^r.$$
Положив $V^i = \delta^i_1$, получим $(\pounds_{\bar{V}}\mathsf{T})^{i\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,l} = \partial\mathsf{T}^{i\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,l}/\partial x^1$.

3.7. $$[L^2,\ \pounds_{\bar{l}_z}] = \pounds_{\bar{l}_x}[\pounds_{\bar{l}_x},\ \pounds_{\bar{l}_z}] + [\pounds_{\bar{l}_x},\ \pounds_{\bar{l}_z}]\pounds_{\bar{l}_x} + \pounds_{\bar{l}_y}\times[\pounds_{\bar{l}_y},\ \pounds_{\bar{l}_z}] + [\pounds_{\bar{l}_y},\ \pounds_{\bar{l}_z}]\pounds_{\bar{l}_y} = \pounds_{\bar{l}_x}\pounds_{\bar{l}_y} + \pounds_{\bar{l}_y}\pounds_{\bar{l}_x} - \pounds_{\bar{l}_y}\pounds_{\bar{l}_x} - \pounds_{\bar{l}_x}\pounds_{\bar{l}_y} = 0.$$

Второй шаг основан на тождестве (3.8). Чтобы доказать (3.33), выведите следующие соотношения: $\bar{l}_x = -\sin\varphi\,\partial/\partial\theta - \cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta\,\partial/\partial\varphi$; $\bar{l}_y = -\cos\varphi\,\partial/\partial\theta + \sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta\,\partial/\partial\varphi$; $\bar{l}_z = \partial/\partial\varphi$.

3.8. Это тривиально следует из того, что $\pounds_{a\bar{V}} = a\pounds_{\bar{V}}$, если a — *константа*. (Это неверно, если a — произвольная функция.)

3.9. При переносе Ли вдоль φ из $\varphi = 0$ вектор $\bar{e}_z$ не меняется, а $\bar{e}_x$ превращается в $\bar{e}_r = \cos\varphi\bar{e}_x + \sin\varphi\bar{e}_y$. Третий базисный вектор $\bar{e}_\varphi$ в декартовом базисе имеет вид $-\sin\varphi\bar{e}_x + \cos\varphi\bar{e}_y$. Три векторные гармоники — это: $\exp(2i\varphi)\bar{e}_z$, $\exp(2i\varphi)(\cos\varphi\bar{e}_x + \sin\varphi\bar{e}_y)$, $\exp(2i\varphi)(-\sin\varphi\bar{e}_x + \cos\varphi\bar{e}_y)$. Иногда удобнее перейти к их линейным комбинациям: $\exp(2i\varphi)\bar{e}_z$, $\exp(i\varphi)(\bar{e}_x + i\bar{e}_y)$, $\exp(3i\varphi)(\bar{e}_x - i\bar{e}_y)$. Отсюда видно, что $\bar{e}_x + i\bar{e}_y$ имеет собственное значение $+1$, а $\bar{e}_x - i\bar{e}_y$ — собственное значение -1, что впрочем легко и прямо проверить. Перенос Ли не меняет один-форму $\tilde{d}z$, а $\tilde{d}x$ переходит в $\tilde{d}r = \cos\varphi\tilde{d}x + \sin\varphi\tilde{d}y$. Третья базисная один-форма $\tilde{d}\varphi$ в декартовом базисе имеет вид $-\sin\varphi\tilde{d}x + \cos\varphi\tilde{d}y$. Поэтому тремя гармониками для один-форм будут: $\exp(2i\varphi)\tilde{d}z$, $\exp(i\varphi)(\tilde{d}x + i\tilde{d}y)$, $\exp(3i\varphi)(\tilde{d}x - i\tilde{d}y)$. Поскольку $\pounds_{\bar{e}_\varphi}f = 2if$, то $\tilde{d}(\pounds_{\bar{e}_\varphi}f) = 2i\tilde{d}f$. Кроме того, как легко показать (используя цилиндрические координаты), $\tilde{d}(\pounds_{\bar{e}_\varphi}f) = \pounds_{\bar{e}_\varphi}(\tilde{d}f)$, что и завершает доказательство. Последнее равенство есть частный случай общей теоремы, которая будет доказана ниже, в § 4.21.

3.10. Правоинвариантное векторное поле инвариантно относительно отображений R_g, которые порождаются правыми сдви-

гами так же, как L_g — левыми. Рисунок 3.10 «верен», и в этом случае, следовательно, такие поля образуют алгебру Ли. Интегральные кривые правоинвариантных векторных полей, проходящие через e, являются однопараметрическими подгруппами по тем же причинам, что и в случае левоинвариантных полей. Таким образом, однопараметрические подгруппы находятся в 1-1-соответствии сразу с обоими семействами интегральных кривых; следовательно, кривые в этих семействах одни и те же. Интегральные кривые левоинвариантного поля, не проходящие через e, получаются левым сдвигом из кривых, проходящих через e, т. е. из однопараметрических подгрупп. Кривая поля $\bar{V}$, проходящая, например, через точку h, — это $hg_{\bar{V}_e}(t)$. Тогда интегральная кривая правоинвариантного поля, проходящая через h, будет иметь вид $g_{\bar{V}_e}(t)\,h$. Эти выражения различны, за исключением случая, когда $g_{\bar{V}_e}(t)$ и h коммутируют.

3.11 (a) Поскольку левые сдвиги на h^{-1} взаимно-однозначно отображают окрестность h на окрестность e, отображение векторных полей L_h также будет взаимно-однозначным и обратимым. Отсюда следует, что если $\{\bar{V}_i(e)\}$ линейно-независимы, то это верно для $\{L_h\bar{V}_i(e) \equiv \bar{V}_i(h)\}$ при любом h.

(b) Дело в том, что поля $\{\bar{V}_i\}$ образуют глобальный базис и любое векторное поле определяется заданием $\{\alpha_i(g)\}$ для всех g. Это отображает TG на $G \times R^n$.

3.12. (b) Ключевой момент: $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}ABB^{-1}AB \ldots B^{-1}AB = B^{-1}A^nB$.

(c) Экспонента от блочно-диагональной матрицы легко вычисляется, поскольку

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & P_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & P_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (P_1)^n & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & (P_2)^n & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & (P_3)^n & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

в случае (i) $\exp(t\lambda_j)$ — это обычная экспонента. В случае (ii)

$$\exp\left[t\begin{pmatrix} r_j & s_j \\ -s_j & r_j \end{pmatrix}\right]$$

$$= \exp\left[t\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_j + is_j & 0 \\ 0 & r_j - is_j \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\exp\left[t\begin{pmatrix} r_j + is_j & 0 \\ 0 & r_j - is_j \end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -1\end{pmatrix}\exp(tr_j)\begin{pmatrix}\cos tr_j+i\sin ts_j & 0\\ 0 & \cos tr_j-\mathrm{i}\sin ts_j\end{pmatrix}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -1\end{pmatrix},$$

откуда и следует ответ. В случае (iii), немного повозившись можно проверить формулу

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \ldots\\ 0 & x & 1 & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & x & 1 & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} x^n & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n & \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x^n & \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}x^n & \ldots\\ 0 & x^n & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n & \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x^n & \ldots\\ 0 & 0 & x^n & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Умножив на t^n и подставив в разложение экспоненты, получим (3.59с).

3.13. Семейство матриц

$$\begin{pmatrix}\cos t & \sin(t/2)\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

— непрерывная кривая, содержащая e (при $t=0$) и

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

(при $t=\pi$). Рассматриваемая матрица не принадлежит никакой однопараметрической подгруппе, поскольку не является экспонентой ни от какой матрицы, что следует из упр. 3.12. Легко проверить, что ни одну из матриц вида (3.59) нельзя преобразовать с помощью (3.56) в рассматриваемую матрицу, поскольку на диагонали стоят отрицательные числа.

3.14. (а) Собственное значение λ матрицы A удовлетворяет уравнению $\det(A-\lambda I)=0=\det(A-\lambda I)^T=\det(A^T-\lambda I)=\det(A^{-1}-\lambda I)$ и поэтому является собственным значением A^{-1}. Верно и обратное.

(b) $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow 0 = \det(A^{-1})\det(A - \lambda I) = \det(I - \lambda A^{-1}) = \det(-\lambda I)\det(A^{-1} - \lambda^{-1} I)$. Так как $\det(A) \neq 0$, то все собственные значения отличны от нуля и, следовательно, $\det(A^{-1} - \lambda^{-1} I) = 0$. Таким образом, если A — из $O(n)$ и λ — собственное значение A, то им будет и $1/\lambda$. Но поскольку уравнение $\det(A - \lambda I) = 0$ вещественное, то его решения образуют пары комплексно-сопряжённых чисел. Чтобы два числа в такой паре были взаимно обратны, они должны иметь вид $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$.

(c) Такая форма есть как раз (3.58a, b) при специальных собственных значениях, причём (3.62b) — это частный случай (3.62c). Случай (3.58c) с $\mu_i = \pm 1$ следует исключить. Такая форма невозможна, поскольку $B^{-1}AB$ принадлежит $O(n)$, а (3.58c), очевидно, нет.

(d) Чтобы найти алгебру Ли данной группы, достаточно рассмотреть касательное пространство произвольного её элемента, например e, поэтому мы можем ограничиться рассмотрением генераторов однопараметрических подгрупп в $SO(n)$. Задачу можно решить, привлекая каноническую форму, но быстрее следующий способ. Возьмём элемент $\exp(tA)$, где A принадлежит алгебре Ли группы $O(n)$. Тогда $[\exp(tA)]^{-1} = \exp(-tA)$ и $[\exp(tA)]^T = \exp(tA^T)$. Эти выражения равны при любом t, следовательно, $A^T = -A$. Обратное доказывается так же. Размерность $O(n)$ есть максимальное число линейно-независимых антисимметричных матриц размера $n \times n$, а оно равно $n(n-1)/2$.

3.15. Матрица A принадлежит $SO(n)$ тогда и только тогда, когда в её канонической форме (3.62) чётное число блоков (-1). Элемент из $O(n)$, не принадлежащий $SO(n)$, имеет нечётное число блоков (-1) и может быть тривиально получен из элемента $SO(n)$ указанным преобразованием.

3.16. Как было сказано в указаниях к предыдущей задаче, в канонической форме матрицы A из $SO(n)$ чётное число блоков (-1), на которые можно смотреть как на частный случай блоков (3.62c) при $\theta = \pi$. Любая из канонических форм (3.62a), (3.62c) есть частный случай экспонент (3.59a) или (3.59b). В канонической форме для матриц из группы $SO(3)$ один блок должен быть (3.62a), а другой — (3.62c). Собственный вектор для (3.62a) — это ось вращения.

3.17. Воспользуйтесь (3.60).

3.18. Матрица $\mathrm{diag}[\exp(\mathrm{i}a_1 t), \exp(\mathrm{i}a_2 t), \ldots]$ есть экспонента от матрицы $\mathrm{diag}(\mathrm{i}a_1 t, \mathrm{i}a_2 t, \ldots)$. Определитель первой матрицы равен $\exp\left(\mathrm{i}t \sum_j a_j\right)$, и если он равен 1, то след второй матрицы равен 0. Зададим соответствие между комплексными

числами и 2×2-матрицами правилом $a+ib \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Оно устойчиво относительно умножения: $(a+ib)(c+id) \leftrightarrow \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$. Таким образом, это групповой изоморфизм между комплексными числами и матрицами специального вида. (На самом деле это изоморфизм алгебр, так как он устойчив и относительно сложения.) Эта конструкция обобщается до изоморфизма между $GL(n, \mathrm{C})$ и подгруппой в $GL(2n, \mathrm{R})$, состоящей из матриц, построенных из 2×2-блоков вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Эрмитову сопряжению в $GL(n, \mathrm{C})$, очевидно, соответствует транспонирование в $GL(2n, \mathrm{R})$. Итак, мы можем считать $U(n)$ подгруппой в $O(2n)$. Поскольку генераторы $O(2n)$ — это антисимметричные $2n\times 2n$-матрицы, то генераторы $U(n)$ — это антиэрмитовы матрицы. В силу нашего первого замечания и упр. 3.20(а), эти матрицы должны иметь нулевой след.

3.20. (a) $(B^{-1}AB)^i{}_k = (B^{-1})^i{}_l A^l{}_m B^m{}_k$. Но $(B^{-1})^i{}_l B^m{}_i = \delta^m{}_l$, поэтому $\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A)$.

(b) Поскольку $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$, то $\det(\exp(A)) = \det(B^{-1}\exp(A)B) = \det(\exp(B^{-1}AB))$; далее $\exp(\mathrm{tr}(A)) = \exp(B^{-1}(\mathrm{tr}\, A)B) = \exp(\mathrm{tr}(B^{-1}AB))$. Таким образом, достаточно доказать (3.67) для различных канонических форм. Для формы (3.58a) это тривиально. Для (3.58b) всё сразу следует из рассмотрения (3.59b). Аналогично обстоит дело с (3.58c), поскольку матрица в (3.59c) имеет единичный определитель.

3.21. (a) Воспользуйтесь тождеством $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{b}\cdot\bar{c})\bar{a}$.

3.22. (a) Учтите, что $\det\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2$ обращается в нуль только для нулевой матрицы.

(b) Размерность равна 4, так как для задания элемента из H нужны четыре независимых вещественных числа.

(d) Уравнение (3.73) есть уравнение сферы S^3, и искомое 1-1-отображение ставит матрице A в соответствие точку $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ сферы S^3 в R^4.

3.23. Поскольку $[g(s)]^{-1} = \exp(-s\bar{Y})$, мы можем записать (3.79) в виде

$$\exp(s\bar{Y})\exp(t\bar{X})\exp(-s\bar{Y}) = \exp[t\,\mathrm{Ad}_{g(s)}(\bar{X})].$$

Дифференцируя обе части по t, получаем при $t=0$

$$\exp(s\bar{Y})\bar{X}\exp(-s\bar{Y}) = \mathrm{Ad}_{g(s)}(\bar{X}).$$

Разложив левую часть по степеням s:

$$\bar{X}+s[\bar{Y},\ \bar{X}]+\frac{1}{2}s^2[\bar{Y},\ [\bar{Y},\ \bar{X}]\,]+\frac{1}{3}s^3[\bar{Y},[\bar{Y},[\bar{Y},X]\,]\,]+\ldots,$$

получаем ответ.

3.24. (b) $\bar{l}_x(Y_{1-1})=\mathrm{i}Y_{10}/\sqrt{2}$; $\bar{l}_y(Y_{1-1})=Y_{10}/\sqrt{2}$; $\bar{l}_z(Y_{1-1})=\mathrm{i}Y_{1-1}$; $\bar{l}_x(Y_{10})=\mathrm{i}(Y_{1-1}-Y_{11})/\sqrt{2}$; $\bar{l}_y(Y_{10})=-(Y_{1-1}+Y_{11})/\sqrt{2}$; $\bar{l}_zY_{10}=0$; $\bar{l}_x(Y_{11})=-\mathrm{i}Y_{10}/\sqrt{2}$; $\bar{l}_y(Y_{11})=Y_{10}/\sqrt{2}$; $\bar{l}_z(Y_{11})=\mathrm{i}Y_{11}$. Поэтому любая комплексная линейная комбинация этих трёх функций переводится дифференцированием вдоль $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$, $\bar{l}_z$ снова в линейную комбинацию этих функций.

3.25. Из первого равенства (3.30) следует, что $\bar{l}_z(f)=0$. Тогда из двух оставшихся получаем $\bar{l}_x(f)=\bar{l}_y(f)=0$. Итак, f постоянна на сфере.

3.26. $\Lambda^{j'}{}_k=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$;

$$\Lambda^k{}_{j'}=\frac{1}{2}\left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix};$$

$$X^{j'}{}_{k'}\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix};\qquad X^j{}_k=L_1.$$

4.1. $\mathsf{B}(\bar{U}+\bar{W},\ \bar{U}+\bar{W})=0=\mathsf{B}(\bar{U},\ \bar{U})+\mathsf{B}(\bar{U},\ \bar{W})+\mathsf{B}(\bar{W},\ \bar{U})$ $+\mathsf{B}(\bar{W},\ \bar{W})=\mathsf{B}(\bar{U},\ \bar{W})+\mathsf{B}(\bar{W},\ \bar{U})$.

4.2. (a) $\tilde{p}(\ldots,\ \bar{U},\ \ldots,\ \bar{W},\ \ldots)=p_{\ldots i\ldots j\ldots}U^iW^j$

$$=-p_{\ldots j\ldots i\ldots}U^iW^j=-\tilde{p}(\ldots,\ \bar{W},\ \ldots,\ \bar{U},\ \ldots).$$

(b) следует из равенств $A_{ijk}=-A_{jik}=A_{kij}$ и т. д.

(c) $A_{ij}B^{ij}=\frac{1}{2}A_{ij}B^{ij}+\frac{1}{2}A_{ji}B^{ji}=\frac{1}{2}(A_{ij}B^{ij}-A_{ij}B^{ji})=A_{ij}B^{[ij]}$. Первый шаг сводится к перестановке немых индексов.

(d) $B^{[ij]}=\frac{1}{2}\left[\mathsf{B}(\tilde{\omega}^i,\ \tilde{\omega}^j)-\mathsf{B}(\tilde{\omega}^j,\ \tilde{\omega}^i)\right]=0.$

4.3. Компоненты p-формы $\tilde{\omega}$ — это её значения на p базисных векторах. Если $p>n$, то найдутся по крайней мере два совпадающих вектора. Их перестановка ничего не меняет, но в

то же время знак компоненты должен измениться. Единственное число, равное самому себе со знаком минус, — эго нуль.

4.4. Надо лишь показать, что сумма двух p-форм есть p-форма, т е является антисимметричной, и что p-форма, умноженная на число, — тоже p-форма. Размерность нашего пространства — это число независимых компонент p-формы, равное C_p^n, как видно из (4 7).

4.5. $\tilde{p} \wedge \tilde{q}(\bar{U}, \bar{V}) = \tilde{p}(\bar{U})\tilde{q}(\bar{V}) - \tilde{q}(\bar{U})\tilde{p}(\bar{V}) = -\tilde{p} \wedge \tilde{q}(\bar{V}, \bar{U})$. Очевидно, что $\tilde{p} \wedge \tilde{p}(\bar{U}, \bar{V}) = 0$ при любых $\bar{U}$, $\bar{V}$.

4.6. Проверка (4.9): $\tilde{\alpha}(\bar{U}, \bar{V}) = \frac{1}{2}\alpha_{ij}[\tilde{\omega}^i(U)\tilde{\omega}^j(V) - \tilde{\omega}^j(\bar{U})\tilde{\omega}^i(\bar{V})] = \frac{1}{2}\alpha_{ij}(U^iV^j - V^iU^j) = \frac{1}{2}\alpha_{ij}U^iV^j + \frac{1}{2}\alpha_{ji}V^iU^j = \alpha_{ij}U^iV^j$. Число независимых два-форм $\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k$, равное $n(n-1)/2$, и есть размерность пространства два-форм.

4.7. По формуле бинома Ньютона $(1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_p^n$. Обратите внимание, что в сумме есть член с $p = 0$, отвечающий одномерному пространству нуль-форм.

4.8. Из равенства (4.9) и его обобщения мы знаем, что $\tilde{q} = (1/2!)\,q_{jk}\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k$ и $\tilde{p} \wedge \tilde{q} = (1/3!)(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{ijk}\,\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k$. Но $\tilde{p} \wedge \tilde{q} = (1/2!)\,p_iq_{jk}\tilde{\omega}^i \wedge (\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k) = (1/2!)\,p_iq_{jk}\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k = (1/2!)\,p_{[i}q_{jk]}\,\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k$. Поскольку $\{\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k\}$ образуют базис, мы видим, что $(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{ijk} = (3!/2!)\,p_{[i}q_{jk]} = \frac{1}{2}(p_iq_{jk} + p_kq_{ij} + p_jq_{ki} - p_iq_{kj} - p_kq_{ji} - p_jq_{ik}) = p_iq_{jk} + p_kq_{ij} + p_jq_{ki}$. Обобщение до (4.11) прямо отсюда следует. Напомним, что $C_p^{p+q} = C_q^{p+q}$, поэтому $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ входят в (4.11) равноправно.

4.9. Обе части равенства (4 16) билинейны по $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\alpha}$, поэтому достаточно доказать его в случае $\tilde{\beta} = \tilde{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^p$ и $\tilde{\alpha} = \tilde{\omega}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{p+q}$. Тогда $\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}(\xi) = (\tilde{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^p \wedge \tilde{\omega}^{p+1} \wedge \ldots \ldots \wedge \tilde{\omega}^{p+q})(\xi)$. В этом внешнем произведении имеется $(p+q)!$ членов, отвечающих всевозможным перестановкам индексов. Те члены, где первой стоит форма $\tilde{\omega}^1$, при свёртке с ξ дают $\tilde{\omega}^1(\xi)(\tilde{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^p \wedge \tilde{\omega}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{p+q})$. Каждый член с $\tilde{\omega}^2$, стоящей на первом месте, получается из членов со стоящей на первом месте $\tilde{\omega}^1$ заменой $\tilde{\omega}^1$ на $\tilde{\omega}^2$, т. е. нечетной перестановкой Итак, после свертки с ξ эти члены дадут $-\tilde{\omega}^2(\xi)(\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^3 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^p \wedge \tilde{\omega}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{p+q})$. Аналогично рассматриваются свёртки $\tilde{\omega}^3(\xi)(\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^3 \wedge \tilde{\omega}^4 \wedge \ldots)$ и т. д. Первые p свёрток как раз и есть $\tilde{\beta}(\xi) \wedge \tilde{\alpha}$, поскольку в них входят лишь один-формы из $\tilde{\beta}$.

Оставшиеся q свёрток суть, с точностью до (общего) знака, зависящего от степени $\tilde{\beta}$, свёртки один-форм из $\tilde{\alpha}$ с ξ, внешне умноженные слева на $\tilde{\beta}$. Таким образом, первый член такого типа — это $(-1)^p \tilde{\omega}^{p+1}(\xi)(\tilde{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^p \wedge \tilde{\omega}^{p+2} \wedge \ldots \ldots \wedge \tilde{\omega}^{p+q})$, и все остальные тоже имеют вид $(-1)^p$, умноженная на некий член разложения $\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}(\xi)$.

4.10. В декартовых координатах $\bar{W} = \bar{U} \times \bar{V}$ имеет компоненты $(U^2V^3 - U^3V^2,\ U^3V^1 - U^1V^3,\ U^1V^2 - U^2V^1)$. Для $\omega_{123} = 1$ формула (4.20) принимает вид $*(\bar{U} \times \bar{V})_{12} = (\bar{U} \times \bar{V})^3$ и т. д., что и доказывает равенство (4.22).

4.11. (a) Правая часть равенства, следующего за (4.35), есть сумма $(p+1)!$ слагаемых. На следующей строке сначала выписаны $p!$ слагаемых, у которых нижний индекс i идет первым. Дальше идёт взятая с правильным знаком сумма $p!$ членов, имеющих первым нижним индексом m. Последняя строка получается после суммирования по i $(\delta^i{}_i = n)$.

(b) Чтоб перейти от n-дельты к p-дельте, применим (4.36) $n-p$ раз и получим множитель $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-p)$, требуемый в (4.37).

4.12. (a) Ключевой пункт: $\varepsilon_{ij\ldots k}A^{1i}A^{2j}\ldots A^{nk} = A^{11}(\varepsilon_{1j\ldots k}A^{2j}\ldots A^{nk}) + A^{12}(\varepsilon_{2j\ldots k}A^{2j}\ldots A^{nk}) + \ldots = A^{11}(\varepsilon_{\alpha\ldots\beta}A^{2\alpha}\ldots A^{n\beta}) - A^{12}(\varepsilon_{\alpha\ldots\beta}A^{2\alpha}\ldots A^{n\beta}) + - \ldots$, причём в последней строчке греческие индексы принимают лишь $n-1$ значений: в первой сумме пропускается 1, во второй 2 и т. д. Как следует из (4.39), p-й член в разложении — это определитель матрицы размера $(n-1)\times(n-1)$, полученный исключением первой строки и p-го столбца из исходной матрицы.

(b) Правая часть (4.39), очевидно, меняет знак при взаимной замене индексов 1 и 2; отсюда можно вывести требуемое равенство.

4.13. Пусть $\Lambda^i{}_{j'}$ — матрица преобразований базисных один-форм: $\tilde{\omega}^i = \Lambda^i{}_{j'}\tilde{d}x^{j'}$. Тогда $\tilde{\omega} = \Lambda^1{}_{j'}\ldots\Lambda^n{}_{k'}\tilde{d}x^{j'} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{k'} = \Lambda^1{}_{j'}\ldots\Lambda^n{}_{k'}\varepsilon^{j'\ldots k'}\tilde{d}x^{1'} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{n'} = \det(\Lambda)\,\tilde{d}x^{1'} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{n'}$. Но закон преобразования метрики имеет вид $g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'}\Lambda^l{}_{j'}g_{kl}$; если взять определитель от обеих частей этого матричного равенства, то мы получим $\det(g_{i'j'}) = [\det(\Lambda)]^2\det(g_{ij})$. (Заметим, что, как следует из упр. 4.12(b), определители матрицы и её транспонированной совпадают.) Далее, поскольку исходный базис был ортонормированным, то $\det(g_{ij} = \pm 1)$, откуда следует, что $\det(\Lambda) = |\det(g_{i'j'})|^{1/2}$, чем требуемый результат и доказан.

4.14. (a) Это частный случай свойства (2), когда $\tilde{\alpha}$ есть нуль-форма f; $\tilde{d}\tilde{d}g$ «исчезает» по свойству (3).

(b) Это очевидно.

4.15. $V^{i'}{}_{,k'} = \Lambda^{j}{}_{k'}(\Lambda^{i'}{}_{l}V^{l})_{,j} = \Lambda^{j}{}_{k'}\Lambda^{i'}{}_{l}V^{l}{}_{,j} + \Lambda^{j}{}_{k'}\Lambda^{i'}{}_{l,j}V^{l}$. Второй член преобразуется не по тензорному закону. Далее, в $[\bar{U}, \bar{V}]^{i'}$ два «неправильных» члена дают $U^{j}V^{l}\Lambda^{i'}{}_{l,j} - V^{j}U^{l}\Lambda^{i'}{}_{l,j}$. Эта сумма равна нулю, поскольку $\Lambda^{i'}{}_{l,j} = \Lambda^{i'}{}_{j,l} = \partial^2 x^{i'}/\partial x^{j}\partial x^{l}$.

4.16. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = {}^*\tilde{d}(\tilde{d}f) = {}^*(\tilde{d}\tilde{d}f) = 0.$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\tilde{a}) = \tilde{d}^*({}^*\tilde{d}\tilde{a}) = \tilde{d}({}^{**}\tilde{d}\tilde{a}) = \tilde{d}\tilde{d}\tilde{a} = 0.$$

4.17. Первое выражение в (4.64) — это $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$, записанное в компонентах. Следующий шаг делается так же, как в упр. 4.11(a). Второй член в правой части (4.64) получается из первого заменой j на l, это приводит к изменению знака и показывает, что эти члены равны.

4.18. $\operatorname{div}(\tilde{a}) = \tilde{d}^*\tilde{a} = 0 \Rightarrow {}^*\tilde{a} = \tilde{d}\tilde{b}$ при некотором $\tilde{b} \Rightarrow \tilde{a} = {}^*\tilde{d}\tilde{b} = \operatorname{rot}(\tilde{b})$.

$$\operatorname{rot}(\tilde{a}) = {}^*\tilde{d}\tilde{a} = 0 \Rightarrow \tilde{d}\tilde{a} = 0 \Rightarrow \tilde{a} = \tilde{d}f = \operatorname{grad}(f).$$

4.19. Выберите векторный базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$, такой что $(\bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ касательны к ∂U: $\tilde{n}(\bar{e}_p) = 0$ при $2 \leqslant p \leqslant n$. Это значит, что $\tilde{n}(\bar{e}_1) \neq 0$, поскольку у $\tilde{n}$ должна быть по крайней мере одна ненулевая компонента. Так как $\tilde{\omega}$ — n-форма, то у неё всего одна независимая компонента, равная $\tilde{\omega}(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = (\tilde{n} \wedge \tilde{\alpha})(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$. Единственный ненулевой член здесь отвечает свёртке $\tilde{n}$ с $\bar{e}_1$, поэтому мы получаем $\tilde{n}(\bar{e}_1)\tilde{\alpha}(\bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$. Но $\tilde{\alpha}(\bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ — это единственная компонента $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ в этом базисе, и, следовательно, она равна $\tilde{\omega}(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)/\tilde{n}(\bar{e}_1)$. Сама по себе $\tilde{\alpha}$ задается неоднозначно: при любой функции f форма $\tilde{\alpha} + f\tilde{n}$ так же хорошо подходит. Далее, единственное условие на форму $\tilde{n}$ — это её ортогональность к ∂U. Это значит, что в нашем базисе $\tilde{n}$ имеет компоненты $(n^1, 0, \ldots, 0)$, и очевидно, что для любых двух $\tilde{n}$ и $\tilde{n}'$ мы имеем $\tilde{n} = f\tilde{n}'$. Но из предыдущего рассмотрения следует, что $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ переходит при этом в $f^{-1}\tilde{\alpha}|_{\partial U}$, следовательно, $\tilde{n}(\xi)\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ не меняется.

4.20. Действуя так же, как в случае (4.76), находим

$$\tilde{d}[\tilde{\omega}(\xi)] = (f\xi^i)_{,i}x\tilde{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n = f^{-1}(f\xi^i)_{,i}\tilde{\omega}.$$

4.21. Используя упр. (4.13), покажите, что метрика в сферических координатах задаётся матрицей $\operatorname{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta)$. Тогда выражение для $\operatorname{div}\bar{\xi}$ получается, если положить $f = r^2\sin\theta$ в (4.80).

4.22. Из (4.67) следует, что $\mathcal{L}_{\bar{V}}(\rho\tilde{\omega}) = \tilde{d}\,[\rho\tilde{\omega}(\bar{V})] = \tilde{d}\,[\tilde{\omega}(\rho\bar{V})] = \operatorname{div}(\rho\bar{V})\,\tilde{\omega}$.

4.23. (a) Поскольку $\tilde{\omega}(\xi) = {}^*\xi$, дуализация (4.77) прямо даёт (4.81).

(b) ${}^*\mathsf{F}$ — это $(n-p)$-форма, $d^*\mathsf{F}$ — это $(n-p+1)$-форма, следовательно, ${}^*d^*\mathsf{F}$ — это $(p-1)$-вектор. Равенство (4.83) доказывается простым обобщением (4.76).

(c) $(\operatorname{div}_{\tilde{\omega}}\mathsf{F})^{i\,\dots\,j} = f^{-1}(fF^{ki\,\dots\,j})_{,k}$.

4.24. (a) Если $\tilde{\omega} = \tilde{d}\tilde{a}$, то $\int \tilde{\omega} = \oint \tilde{a}$, но последний интеграл равен нулю, поскольку границы нет.

(b) $\tilde{d}\tilde{\omega} = \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3$ — это обычная форма объёма, поэтому если B — единичный шар (внутренность S^2 в R^3), то $\int_B \tilde{d}\tilde{\omega} =$ объём шара $= 4\pi/3$. По теореме Стокса $\int_B \tilde{d}\tilde{\omega} = \int_{S^2} \tilde{\omega}\,|_{S^2}$. Далее, любая два-форма на двумерном многообразии замкнута, поскольку все три-формы тождественно равны нулю. Таким образом, $\tilde{\omega}$ замкнута, но (a) для неё не выполнено, следовательно, она не точна.

(c) Нам дана форма $\tilde{\beta}$, определённая всюду на S^2, такая что $\tilde{d}\tilde{\beta} = 0$. Проинтегрировав $\tilde{d}\tilde{\beta}$ по любой области на сфере S^2, ограниченной замкнутой кривой $\mathscr{C}$, мы находим, что $\oint_{\mathscr{C}} \tilde{\beta} = 0$ для любой $\mathscr{C}$. Это может иметь место, только если $\tilde{\beta} = \tilde{d}f$; в противном случае нашлась бы кривая $\mathscr{C}$, по которой $\tilde{\beta}$ имела бы ненулевой интеграл. На самом деле f легко строится явно: положим f в некоторой точке P равным произвольному числу f_0, в любой же другой точке Q положим $f(Q) = f_0 + \int \tilde{\beta}$, где интеграл берётся по произвольной кривой, соединяющей P и Q. Условие $\oint \tilde{\beta} = 0$ гарантирует, что $f(Q)$ не зависит от выбора кривой.

4.25. (a) Свойство (i) и (ii) тривиальны. В случае (iii) положим $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} = \tilde{d}\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\beta} - \tilde{\gamma} = \tilde{d}\tilde{\mu}_2$; тогда $\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma} = \tilde{d}(\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2)$.

(b) Докажите сначала, что если $\tilde{\beta}_1 \approx \tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\beta}_2 \approx \tilde{\alpha}_2$, то $a\tilde{\beta}_1 + b\tilde{\beta}_2 \approx a\tilde{\alpha}_1 + b\tilde{\alpha}_2$ для любых вещественных чисел a, b. Это просто, поскольку существуют $\tilde{\mu}_1$ и $\tilde{\mu}_2$, такие, что $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{d}\tilde{\mu}_1$ и $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\alpha}_2 + \tilde{d}\tilde{\mu}_2 \Rightarrow a\tilde{\beta}_1 + b\tilde{\beta}_2 = a\tilde{\alpha}_1 + b\tilde{\alpha}_2 + \tilde{d}(a\tilde{\mu}_1 + b\tilde{\mu}_2)$. Итак, мы можем самосогласованно определить линейную комбина-

цию aA_1+bA_2 классов эквивалентности A_1 и A_2 как класс эквивалентности, порождённый той же линейной комбинацией любых двух элементов из этих классов. Теперь можно смотреть на классы эквивалентности как на векторы из векторного пространства: нулём будет класс нулевого вектора из Z^p, противоположным классу A — класс $-A$, и т. д.

(c) Возьмём вектор вида $(0, b)$ в R^2. Что входит в его класс эквивалентности? Это все векторы $(0, b)+(a, 0)$ с произвольным a и заданным b. Геометрическое место точек, в которых кончаются эти векторы, есть прямая, параллельная оси x и удалённая от неё на расстояние b. В этом смысле мы можем отождествить пространство классов эквивалентности с конгруэнцией таких линий.

4.26. Указанное векторное поле нигде не может обращаться в нуль, поскольку у нашего отображения нет ни одной неподвижной точки: неподвижная точка соответствовала бы блоку $(+1)$ в канонической форме T, но таких блоков там нет. Заметьте, что решающим здесь является факт нечётной размерности сферы.

4.27. (a) Это тривиально.

(b) $H^{n-1}(S^{n-1})$ — это одномерное векторное пространство (R^1), поэтому два любых класса эквивалентности кратны друг другу. Поскольку $\tilde{\omega}$ не точна, она принадлежит ненулевому классу эквивалентности. Из упр. 4.25(b) следует, что в любом классе найдется элемент кратный $\tilde{\omega}$, поэтому для любой формы $\tilde{\alpha}$ существует число a, такое что форма $\tilde{\alpha}-a\tilde{\omega}\approx 0$, т. е. точна. Проинтегрировав по S^{n-1}, получим значение a.

(c) Если $\tilde{\alpha}-a\tilde{\omega}=\tilde{d}\tilde{\beta}$, то $\tilde{\beta}$ — это $(n-2)$-форма. Обозначим через $\bar{V}$ вектор, дуальный к ней относительно $\tilde{\omega}: \bar{V}={}^*\tilde{\beta}$, или $\tilde{\beta}=(-1)^n{}^*\bar{V}$. Тогда $\tilde{d}\tilde{\beta}=(-1)^n(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V})\tilde{\omega}$. Если f — функция, дуальная к $\tilde{\alpha}$, то мы получаем $(f-a)\tilde{\omega}=(-1)^n(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V})\tilde{\omega}$. Эта формула равносильна доказываемой.

(d) В этом случае $\tilde{\omega}=x\tilde{d}y-y\tilde{d}x=\tilde{d}\theta$ на единичной окружности, где θ — полярный угол. Любую другую один-форму $\tilde{\alpha}$ можно записать как $g(\theta)\tilde{d}\theta$, и, следовательно, нам надо найти функцию $f(\theta)$, такую что $\tilde{d}f=[g(\theta)-a]\tilde{d}\theta$ всюду. Поскольку $\tilde{d}f=(df/d\theta)\tilde{d}\theta$, то f есть решение уравнения $df/d\theta=g(\theta)-a$, т. е. $f=\int g\,d\theta-a\theta$. Чтоб f была непрерывна, потребуем, чтобы $f(0)=f(2\pi)$, или, что равносильно, $2\pi a=\int_0^{2\pi} g\,d\theta$. Это как раз то условие, которое было получено выше, в пункте (b). Обращая рассуждения того пункта, мы можем заключить, что $H^1(S^1)=R^1$.

4.28. (a) f строится так же, как в упр. 4.24(c).

(b) Предположим, что M односвязно, и пусть $\tilde{\alpha}$ — произвольное достаточно гладкое поле один-форм на M. Тогда $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha}$ гладко меняется при стягивании кривой $\mathscr{C}$. Но $\mathscr{C}$ всегда можно сделать достаточно малой, чтоб она оказалось внутри области, в которой справедлива лемма Пуанкаре (§ 4.19), т. е. $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} = 0$. По непрерывности (объединяем несколько малых кривых в одну большую) отсюда следует, что $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} = 0$ для любой замкнутой кривой $\mathscr{C}$. Тогда из (a) следует, что $H^1(M) = 0$. Аналогично доказывается и обратное утверждение. Если $H^1(M) \neq 0$, то существует замкнутая один-форма $\tilde{\alpha}$, которая не точна. Из пункта (a) вытекает, что существует по крайней мере одна замкнутая кривая $\mathscr{C}$ в M, на которой $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} \neq 0$. Если эту кривую можно гладко стянуть в точку, то для всех достаточно малых её «стягиваний» $\mathscr{C}'$ мы получим $\int_{\mathscr{C}'} \tilde{\alpha} = 0$. Рассуждая, как раньше, приходим к противоречию: $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} = 0$. Следовательно, $\mathscr{C}$ сжаться в точку не может.

4.29. Все линейные комбинации векторов $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m\}$ и только они аннулируются каждой из один-форм $\{\tilde{\omega}^{m+1}, \ldots, \tilde{\omega}^n\}$, поэтому полные идеалы этого набора и исходного совпадают. Пусть $\tilde{\beta}$ — q-форма, аннулирующая каждый вектор из X_p; разложим её по базису один-форм. Каждый член разложения будет внешним произведением q один-форм, причём он должен содержать хотя бы одну из форм $\{\tilde{\omega}^{m+1}, \ldots, \tilde{\omega}^n\}$. В противном случае этот член не будет аннулировать все векторы из X_p. Такое разложение $\tilde{\beta}$ можно записать, как указано в упражнении.

4.30. Как в упр. 4.29, разложим $\tilde{\gamma}$ по базису один-форм $\{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m, \tilde{\omega}^{m+1}, \ldots, \tilde{\omega}^n\}$. Если $\tilde{\gamma}$ принадлежит указанному идеалу, то в каждом члене разложения есть по крайней мере одна из форм $\{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m\}$ и потому (4.90) выполнено. Обратно, если $\tilde{\gamma}$ — q-форма $(q \leqslant n - m)$, удовлетворяющая (4.90), рассмотрим набор векторов $\{\bar{x}, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{m+q}\}$, где $\bar{x}$ принадлежит аннулятору X_p форм $\tilde{\alpha}_j$, а $\bar{y}_i$ нет. Пусть $(m+q)$-форма из (4.90) действует на этот набор. Нетривиальные члены будут получаться лишь тогда, когда $\bar{x}$ будет аргументом $\tilde{\gamma}$. Если (4.90) выполнено и в этом случае (при произвольных $\bar{y}_i$), то $\gamma(\bar{x}) = 0$ для любого x из X_p. Это и значит, что $\tilde{\gamma}$ принадлежит нашему полному идеалу. Остаётся рассмотреть случай $q + m > n$, когда (4.90) превращается в тож-

дество. Но тогда разложение $\tilde{\gamma}$ по выбранному базису будет содержать хотя бы одну $\tilde{\alpha}_j$ в каждом слагаемом и, следовательно, $\tilde{\gamma}$ принадлежит идеалу.

4.31. (а) Пусть $\tilde{\beta}$ принадлежит полному идеалу набора $\{\tilde{\alpha}_j\}$. Тогда существуют $\{\tilde{\gamma}^i\}$, такие, что $\tilde{\beta}=\sum \tilde{\gamma}^i \wedge \tilde{\alpha}_i$ и $\tilde{d}\tilde{\beta}= =\sum (\tilde{d}\tilde{\gamma}^j \wedge \tilde{\alpha}_j + \tilde{\gamma}^j \wedge \tilde{d}\tilde{\alpha}_j)$. Первое слагаемое лежит в идеале; то же верно и для второго, поскольку $\tilde{d}\tilde{\alpha}_j$ можно представить как $\sum \tilde{\mu}^k \wedge \tilde{\alpha}_k$.

(b) Используйте (4.90) и то, что p-формы при $p > n$ тождественно равны нулю.

4.32. (b) У каждой кривой, удовлетворяющей условиям $U =$ const, $V =$ const касательный вектор аннулирует $\tilde{d}U$ и $\tilde{d}V$, а следовательно и $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, а потому лежит в $\mathscr{H}$.

(c) Используйте критерий (4.90), чтобы определить, при каких условиях $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ и $\tilde{d}\tilde{\beta}$ принадлежат указанному идеалу. Это потребует сложных вычислений, в которых будет полезно данное в задаче указание. Имеем, например, $\tilde{B} \wedge \tilde{d}\tilde{A} = 0$. В результате можем записать $\tilde{d}\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} = \tilde{d}f \wedge \tilde{d}g \wedge [-(\tilde{d}\tilde{C} + \tilde{A} \wedge \tilde{C} + \tilde{B} \wedge \tilde{F}) + f(\tilde{d}\tilde{A} + \tilde{B} \wedge \tilde{E}) + g(\tilde{d}\tilde{B} + \tilde{A} \wedge \tilde{B} + + \tilde{B} \wedge \tilde{D})]$. Это выражение должно обращаться в нуль всюду на многообразии. Член в квадратных скобках пропорционален форме $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y$, не зависящей от $\tilde{d}f \wedge \tilde{d}g$, поэтому он должен обращаться в нуль. Поскольку A, B и т. д. от f и g не зависят, он обращается в нуль тогда и только тогда, когда в нуль обращается каждое из трех его слагаемых. Отсюда получаем три первых условия. Остальные получаются из $\tilde{d}\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} = 0$.

(d) Вынесите $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y$ из каждого члена.

4.33. $\tilde{d}\tilde{\gamma} = \omega^2(\tilde{d}x \wedge \tilde{\alpha} + x\,\tilde{d}\tilde{\alpha}) + \tilde{d}y \wedge \tilde{\beta} + y\,\tilde{d}\tilde{\beta} = -\omega^2 y\,\tilde{d}x \wedge \tilde{d}t - \omega^2 x\,\tilde{d}y \wedge \tilde{d}t + \omega^2 x\,\tilde{d}y \wedge \tilde{d}t + \omega^2 y\,\tilde{d}x \wedge \tilde{d}t = 0$. Так же легко проверить (4.97).

4.34. Рассмотрим скалярное произведение $(\overline{\nabla} Y_{lm}) \cdot ({}^*\tilde{\mathrm{d}}Y_{lm}) = =g_{AB}(g^{AC}Y_{lm,C})(\omega^{DB}Y_{lm,D}) = \omega^{DC}Y_{lm,C}Y_{lm,D}$, которое обращается в нуль в силу антисимметричности ω^{DC}. Поскольку метрика положительно-определённа, эти векторы могут быть параллельны, только если они равны нулю, что может быть (при $l \neq 0$) лишь в изолированных точках.

5.1. Вынесите $\tilde{\mathrm{d}}S \wedge \tilde{\mathrm{d}}T$ и умножьте на P^2.

5.2. (a) $\pounds_{\bar U}\tilde\omega = 0 = \tilde d\,[\tilde\omega(\bar U)]$, поскольку $\tilde d\tilde\omega = 0$. Так как фазовое пространство удовлетворяет условиям леммы Пуанкаре (§ 4.19), существует функция H, такая что $\tilde\omega(\bar U) = \tilde dH$, откуда и следуют (5.16).

(b) Используя $[\pounds_{\bar U}, \pounds_{\bar V}] = \pounds_{[\bar U, \bar V]}$, покажите, что если $\bar U$ и $\bar V$ — гамильтоновы векторные поля, то то же верно и для $[\bar U, \bar V]$. Это и есть скобка в алгебре Ли гамильтоновых векторных полей.

5.3. $\tilde\omega$ антисимметрична.

5.4. В компонентах всё получается тривиально.

5.5. Доказывается так же, как равенство $\tilde\omega(\bar U) = dH$ в упр. 5.2(a).

5.6. (b) Устанавливается прямым вычислением.

(c) Используем (5.32): $\{f, \{g, h\}\} = \bar X_f \bar X_g(h)$; $\{g, \{h, f\}\} = -\{g, \{f, h\}\} = -\bar X_g \bar X_f(h)$; $\{h, \{f, g\}\} = \bar X_{\{f, g\}}(h)$.

5.7. (b) $\pounds_{\bar U}\tilde\sigma = 0$, потому что $\pounds_{\bar U}\tilde\omega = 0$, но $\pounds_{\bar U}\tilde\sigma = (\mathrm{div}_{\tilde\sigma}\,\bar U)\,\tilde\sigma$.

5.8. Очевидно, что $\pounds_{\bar X_f} H = 0$, и, поскольку у $\bar X_f$ нет импульсных компонент, $\partial f/\partial x^i = 0$ и $\partial f/\partial P_i = -U^i$. Итак, $f = -U^i P_i$.

5.9. Используйте преобразование

$$(\Lambda^{i'}{}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.10. (a) Три-форма в четырёхмерном пространстве имеет C независимых компонент.

(b) Например: $F_{[xy,z]} = 0 \Rightarrow F_{xy,z} + F_{zx,y} + F_{yz,x} = 0 = B_{z,z} + B_{y,y} + B_{x,x}$. Это — (5.52c).

5.11. Перемножьте матрицы.

5.12. Например: $F^{t\nu}{}_{,\nu} = F^{tx}{}_{,x} + F^{ty}{}_{,y} + F^{tz}{}_{,z} = E_{x,x} + E_{y,y} + E_{z,z}$. Это даёт (5.52d).

5.13. (a) $({}^*\tilde F)_{tx} = \frac{1}{2}(\omega_{yztx}F^{yz} + \omega_{zytx}F^{zy}) = F^{yz} = B_x$.

$$({}^*\tilde F)_{xy} = \tfrac{1}{2}(\omega_{tzxy}F^{tz} + \omega_{ztxy}F^{zt}) = F^{tz} = E_z.$$

Искомая матрица совпадает с (5.53), если $B_i \to E_i$, $E_i \to -B_i$.

(b) Это следует из упр. 4.23.

5.14. (a) Покажите, что первое уравнение даёт $\mathbf{\nabla}\cdot\mathbf{B}=4\pi\rho_m$, и т. д.

(b) $\tilde{d}\tilde{d}^*\tilde{F}=0 \Rightarrow \tilde{d}^*\tilde{J}=\tilde{d}[\tilde{\omega}(\bar{J})]=(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{J})\,\tilde{\omega}$.

5.15. (a) Это легко доказывается в компонентах.

(b) Поскольку для интегрирования нужно взять ограничение на $\mathscr{H}$, то $^*\tilde{J}$ выступает как три-форма.

(c) Ограничение $^*\tilde{J}$ на $\mathscr{H}$ — это $J^t\,\tilde{d}x\wedge\tilde{d}y\wedge\tilde{d}z$. Ограничение $\tilde{F}$ на $\partial\mathscr{D}$ (поверхность с постоянными t и r) — это $^*F_{\theta\varphi}\,\tilde{d}\theta\wedge\tilde{d}\varphi$. Однако $^*F_{\theta\varphi}=\frac{1}{2}(\omega_{tr\theta\varphi}F^{tr}+\omega_{zt\theta\varphi}F^{rt})=r^2\sin\theta E_r$. (Вспомните равенство (4.40) и упр. 4.21.) Таким образом, в обычных обозначениях интеграл принимает вид $\int\rho d^3x=$ $=\oint E_r r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$.

5.16. (a) Рассмотрите, например, $(t,\ x)$-компоненту (5.64): $F_{tx}=A_{x,t}-A_{t,x}$. Сравните это с обычным определением: $E_x=\varphi_{,x}+A_{x,t}$. Поскольку $F_{tx}=-E_x$, то всё отсюда и следует. С остальными уравнениями это совместно.

(b) $\varphi\to\varphi+f_{,t}$; $A^i\to A^i+\nabla_i f$.

(c) Для статического заряда q в начале координат все компоненты $\mathbf{B}$ равны нулю, а $\mathbf{E}=qr^{-2}e_r$. Отлична от нуля лишь компонента $(^*\tilde{F})_{\theta\varphi}$, равная (как в упр. 5.15) $q\sin\theta$. Отсюда $\alpha_{\varphi,\theta}-\alpha_{\theta,\varphi}=q\sin\theta$. Возможны два решения: $\{\alpha_\varphi=-q\cos\theta,\ \alpha_\theta=\alpha_t=\alpha_r=0\}$ и $\{\alpha_\theta=-q\varphi\sin\theta,\ \alpha_\varphi=\alpha_t=\alpha_r=0\}$. Они отличаются друг от друга на калибровочное преобразование и оба обращают в нуль все остальные компоненты $\tilde{d}\tilde{\alpha}$. Но ни одно не задаёт корректно определённой один-формы: первое не определено в полюсах $\theta=0$ и $\theta=\pi$, второе многозначно.

5.17. Это очевидно.

5.18. $(\pounds_{\bar{U}}\bar{W})^i=[\bar{U},\ \bar{W}]^i=U^jW^i{}_{,j}-W^i{}_{,j}=U^tW^i{}_{,t}+U^\alpha W^i{}_{,\alpha}-W^\alpha U^i{}_{,\alpha}$, где сумма по α берётся только по $(x,\ y,\ z)$. Ответ следует из того, что $U^t=1$ и $U^t{}_{,\alpha}=0$.

5.19. Ответ следует из того, что $\Lambda^{t'}{}_x=\partial t'/\partial x=0$, $\Lambda^t{}_{x'}=$ $=\partial t/\partial x'=0$.

5.20. $dp=(\partial p/\partial\rho)\,d\rho+(\partial p/\partial S)\,dS$. Это обращает (5.77) в нуль, поскольку $\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}S=0=\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\rho$.

5.21. Возьмите дуализацию (5.80), как в (5.82), и найдите компоненты.

5.22. Воспользовавшись (3.37) в декартовых координатах, покажите, что (5.85) и (5.86) принимают нужный вид. По-

скольку это тензорные равенства, то, будучи верны в одной координатной системе, они верны и во всех системах.

5.23. В группе изометрии, $SO(3)$, очевидно, имеются элементы, переводящие любую точку сферы в любую другую точку: просто проводим через эти точки большой круг и выполняем поворот вокруг оси, перпендикулярной плоскости круга. Поэтому S^2 однородна. Группа изотропии точки P состоит из всех вращений, оставляющих P неподвижной. Очевидно, что они образуют подгруппу $SO(2)$ в $SO(3)$, следовательно, S^2 изотропна.

5.24. (а) Поскольку V^i должны обращаться в нуль в точке P (группа изотропии оставляет P неподвижной), их разложение Тэйлора имеет вид (5.96) с некоторыми матрицами $A^i{}_j$. Из (5.89), учитывая, что в наших координатах $\Gamma^i{}_{ij} = 0$ и нет разницы между верхними и нижними индексами, мы получаем условие (5.97): $A^i{}_j + A^j{}_i = 0$.

(b) (5.98) получается простым вычислением.

(c) Алгебры Ли группы изотропии и группы $SO(m)$ совпадают, следовательно, и сами группы совпадают, по крайней мере в некоторой окрестности единичного элемента. Но у точки P есть малая окрестность, взаимно-однозначно отображающаяся на окрестность начала координат в R^m, а из пункта (а) следует, что их поля Киллинга отображаются друг в друга с точностью до $O(x^2)$. Поэтому их преобразования изотропии можно привести в 1-1-соответствие, и наши группы совпадают.

(d) Если g не положительно-определённа, то в нашей системе координат поднятие и опускание индексов может изменить знак. Тогда правильно записанное (5.97) — это $A_{ij} = -A_{ji}$, а не $A^i{}_j = -A^j{}_i$, и алгебра Ли группы изотропии не состоит из антисимметричных матриц.

5.25. (а) Геометрически линии $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ определяются как интегральные кривые поля $\tilde{n}$. Если бы радиальное расстояние между сферами было различно по разным направлениям, то многообразие не было бы изотропным. Поэтому g_{rr} не зависит от θ и φ.

(b) Около точки P мы можем построить координаты, как в упр. 2.14, а затем перейти к сферическим координатам таким же преобразованием, как в плоском пространстве. Эти новые координаты совпадают (при $z \to 0$) с координатами в (5.100), поскольку площадь поверхности сфер определяет r. Таким образом, (5.102) выполнено.

5.26. Доказывается прямым вычислением.

5.27. Они соответствуют $\zeta_{1m} = \text{const}$. Легко видеть, что норма такого вектора стремится к нулю при $r \to 0$, следовательно,

он принадлежит алгебре Ли группы изотропии. Рассматриваемая группа изотропии, $SO(3)$, трёхмерна, и множество всех векторов Киллинга, порождённых тремя константами ζ_{1m}, тоже трёхмерно, поэтому такими векторами исчерпывается вся группа изотропии.

5.82. Перейдите к декартовым координатам или вычислите норму вектора с $V_m = 1$ и $\zeta_{1m} = 0$.

5.29. Очевидно, что $f = 1 \Rightarrow S$ есть E^3. Далее, $\partial/\partial x = \cos\varphi \sin\theta \partial/\partial r + r^{-1}\cos\varphi\cos\theta\partial/\partial\theta - r^{-1}\sin\varphi\cos\theta\,\partial/\partial\varphi$ — это вектор Киллинга, порождённый $V_1 = V_{-1} = (2\pi/3)^{1/2}$, $\zeta_{1m} = 0$.

5.30. Из вторых и третьих диагональных компонент матриц (5.119) мы получаем $r = \sin\chi/\sqrt{K}$ и $r = \operatorname{sh}\chi/\sqrt{K}$ соответственно. Остаётся проверить, что первая диагональная компонента получится, какая надо. Например, в случае $K > 0$: $g_{\chi\chi} = g_{rr}(\partial r/\partial\chi)^2 = (1 - Kr^2)^{-1}\cos^2\chi/K = 1/K$, как и требовалось.

5.31. $w = r\cos\chi$, $x = r\sin\chi\sin\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\chi\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\chi\cos\theta$. Тогда, например, $g_{\theta\theta} = (\partial w/\partial\theta)^2 + (\partial x/\partial\theta)^2 + (\partial y/\partial\theta)^2 + (\partial z/\partial\theta)^2 = r^2\sin\chi$. Для полного совпадения остаётся положить $r^2 = K^{-1}$.

5.32. (a) Центральный пункт состоит в том, что при $K < 0$ площадь/4π(радиальное расстояние)$^2 = \operatorname{sh}^2\chi/\chi^2 > 1$. Рассмотрим сферу в подмногообразии пространства E^n. Вследствие положительности метрики в E^n расстояние от центра сферы до её поверхности вдоль кривой в любом подмногообразии E^n всегда больше, чем «настоящий» радиус сферы. Поэтому для любого сферически симметричного подмногообразия в E^n площадь/4π(радиальное расстояние)$^2 \leqslant 1$. Таким образом, открытая Вселенная не может быть «погружена» ни в какое эвклидово пространство с сохранением метрики. Это верно даже тогда, когда открытая Вселенная имеет положительно-определённую метрику!

(b) Рассмотрим гиперболоид $-t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = K^{-1}$ (< 0) в пространстве Минковского. Зададим обычные сферические координаты: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$; тогда это подмногообразие задается как $t = (r^2 - K^{-1})^{1/2}$. Компоненты метрического тензора будут $g_{rr} = -(\partial t/\partial r)^2 + (\partial x/\partial r)^2 + (\partial y/\partial r)^2 + (\partial z/\partial r)^2 = (1 - Kr^2)^{-1}$. Аналогично $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta$. Таким образом, гиперболоид изометричен открытой Вселенной.

6.1. Воспользуйтесь определением тензора.

6.2. Прямой подсчет по (6.6) с учётом $\bar{e}_{l'} = \Lambda^m{}_{l'}\bar{e}_m$.

6.3. Тривиально.

6.4. Базисный вектор $\bar{e}_\theta$ на рис. 6.1 не меняется при переносе по направлению θ: $\nabla_{\bar{e}_\theta}\bar{e}_\theta = 0$. Поэтому мы получаем из (6.6): $\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\theta} = \Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} = 0$. Представим, что вектор в точке D на рис. 6.2 это $\bar{e}_\varphi$. Тогда при переносе по направлению θ будет оставаться неизменным лишь его направление, но не длина, поскольку при приближении к полюсам $\bar{e}_\varphi \to 0$ в отличие от переносимого вектора. А именно, $|\bar{e}_\varphi| = \sin\theta$, и мы получаем $\bar{e}_\varphi(\theta + \delta\theta) - \bar{e}_\varphi(\theta) = \bar{e}_\varphi(\theta)\,[\delta(\sin\theta)/\sin\theta]$, или $\nabla_{\bar{e}_\theta}\bar{e}_\varphi = \operatorname{ctg}\theta\,\bar{e}_\varphi$, т. е. $\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = \operatorname{ctg}\theta$, $\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\theta} = 0$. Соответствующие производные по направлению $\bar{e}_\varphi$ вычислить труднее, поскольку кривые $\theta = \text{const}$ не являются большими кругами. Рассмотрим точку P: $\varphi = 0$, $\theta = \theta_0$. На рис. П. 1 мы изобразили окрестность P так, как её видит стоящий в этой точке наблюдатель. Линия $\theta = \theta_0$, проходящая через P, — это кривая, касающаяся большого круга, который выглядит на рисунке как прямая линия. Рассмотрим точку Q с $\varphi = \delta\varphi \ll 1$ на круге $\theta = \theta_0$. Чтоб вычислить, скажем, $\nabla_{\bar{e}_\varphi}\bar{e}_\varphi$ в P, нам нужна разность $\bar{e}_\varphi(Q) - \bar{e}_\varphi(P)$ с точностью до первого порядка по $\delta\varphi$. Поскольку наши координаты не декартовы, то мы не можем просто взять разность компонент векторов в двух разных точках. Вместо этого мы зададим на большом круге векторное поле $\bar{V}$, перенеся $\bar{e}_\varphi(P)$ вдоль него параллельно, т. е. сохраняя вектор касательным и не меняя его длины. Точка R с координатой $\varphi = \delta\varphi$ очень близка к Q, расстояние между ними порядка $O(\delta\varphi^2)$. Поэтому с точностью до первого порядка мы можем взять за основу вектор $\bar{V}(R)$ и аппроксимировать $\bar{e}_\varphi(Q) - \bar{e}_\varphi(P)$ разностью $\bar{e}_\varphi(Q) - \bar{V}(R)$, которую мы уже *можем* вычислять, просто взяв разность компонент. Итак, в наших координатах $\bar{e}_\varphi$ всюду имеет компоненты (0, 1). Найдём $\bar{V}$. Большой круг — это пересечение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с плоскостью $x = z\operatorname{tg}\theta_0$. Поэтому в сферических координатах уравнением большого круга будет $\sin\theta = \sin\theta_0(1 - \cos^2\theta_0\sin^2\varphi)^{1/2}$. Считая φ параметром, находим касательный вектор $(d\theta/d\varphi, 1) = (\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\varphi/(1 - \cos^2\theta_0\sin^2\varphi), 1)$. При $\varphi = 0$ (точка P) он равен $\bar{e}_\varphi(P)$, а при $\varphi = \delta\varphi$ (точка R) это будет $(\sin\theta_0\cos\theta_0\delta\varphi, 1)$, с точностью до первого порядка. С той же точностью он имеет ту же длину, что и $\bar{e}_\varphi(P)$, значит, это на самом деле вектор $\bar{V}(R)$. Таким образом, мы получаем $\nabla_{\bar{e}_\varphi}\bar{e}_\varphi = \lim_{\delta\varphi\to 0}(\bar{e}_\varphi(Q) - \bar{V}(R))/\delta\varphi = (-\sin\theta_0\cos\theta_0, 0)$. Отсюда

Рис. П.1.

следует, что $\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\varphi} = 0$. Аналогичные вычисления для $\nabla_{\bar{e}_\varphi}\bar{e}_\theta$ дают $\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta$, $\Gamma^{\theta}{}_{\theta\varphi} = 0$.

6.5. $\langle\tilde{\omega}^j, \bar{e}_k\rangle = \delta^j{}_k \Rightarrow \langle\nabla_i\tilde{\omega}^j, \bar{e}_k\rangle = -\langle\tilde{\omega}^j, \nabla_i\bar{e}_k\rangle = -\Gamma^j{}_{ki}$. Таким образом, $\nabla_i\tilde{\omega}^j$ — это один-форма, k-я компонента которой равна $-\Gamma^j{}_{ki}$, как и требуется в (6.8).

6.6. Используйте упр. 6.5 и действуйте так же, как при выводе равенства (6.10).

6.7. Действуйте, как в предыдущем упражнении.

6.8. В координатном базисе $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0$.

6.9. Надо показать, что T линеен по своим аргументам. Например, по $\bar{U}$: $\mathsf{T}(\,;f\bar{U}, \bar{V}) = \nabla_{f\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}(f\bar{U}) - [f\bar{U}, \bar{V}] = \bar{f}\,(\nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U} - [\bar{U}, \bar{V}]) - \bar{U}\nabla_{\bar{V}}(f) + \bar{U}\mathcal{L}_{\bar{V}}(f)$. Члены с производными от f сокращаются, следовательно, T действительно линеен по этому аргументу.

6.10. Доказательство аналогично доказательству упр. 6.9.

6.11. Достаточно показать это для скаляров (где оба значка означают одно и то же) и векторов (что составляет содержание (6.13)). Поскольку оба правила дифференцирования обобщаются на тензоры старшего ранга с помощью (6.3), мы получаем ответ для всех тензоров.

6.12. Очевидно.

6.13. Доказывается прямым вычислением.

6.14. (a) В координатном базисе $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0$, $\nabla_i\nabla_j\bar{e}_k = \nabla_i\Gamma^l{}_{kj}\bar{e}_l = \Gamma^l{}_{kj,\,i}\bar{e}_l + \Gamma^l{}_{kj}\nabla_i\bar{e}_l = \Gamma^l{}_{kj,\,i}\bar{e}_l + \Gamma^l{}_{kj}\Gamma^m{}_{li}\bar{e}_m$. Антисимметризация по i и j и переобозначение индексов приводят к ответу.

(b) Очевидно.

(c) (6.23a) сразу следует из (6.19), но (6.23b) надо доказывать. В нормальных координатах в точке P имеем $\Gamma^i{}_{jk}(P) = 0$; значит, $R^l{}_{kij}(P) = \Gamma^l{}_{kj,i} - \Gamma^l{}_{ki,j}$. Тогда $3R^l{}_{[kij]} = \Gamma^l{}_{kj,i} - \Gamma^l{}_{ki,j} + \Gamma^l{}_{ik,j} - \Gamma^l{}_{jk,i} + \Gamma^l{}_{ji,k} - \Gamma^l{}_{ij,k} = 0$, поскольку $\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$.

(d) То что индексов 4, означает, что мы начинаем с n^4 компонент. Равенства (6.23a) — это $n^2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$ отдельных соотношений, поскольку индексы l и k свободные, а симметричных пар $(i\,j)$ имеется $\frac{1}{2}n(n+1)$ штук. (Их столько же, сколько независимых компонент у симметричной матрицы размера $n \times n$.) Связи (6.23b) совершенно не зависят от

(6.23a), поскольку в них входят лишь $R^l{}_{k[ij]}$. Всего в этом равенстве $n(n-1)(n-2)/3!$ различных антисимметричных троек (kij); с учётом произвольности l это дает третье слагаемое в (6.24)

6.15. В нормальных координатах в точке P имеем $R^l{}_{kij,m} = R^l{}_{kij,m} = \Gamma^l{}_{kj,im} - \Gamma^l{}_{ki,jm}$; первый член симметричен по (im), второй — по (jm), поэтому в (6.25) оба обращаются в нуль. Связь с тождеством Якоби следует из (6.19).

6.16. (a) $\bar{e}_r = \cos\theta\bar{e}_x + \sin\theta\bar{e}_y$, $\bar{e}_\theta = -r\sin\theta\bar{e}_x + r\cos\theta\bar{e}_y \Rightarrow \nabla_{\bar{e}_\theta}\bar{e}_r = -\sin\theta\bar{e}_x + \cos\theta\bar{e}_y = r^{-1}\bar{e}_\theta \Rightarrow \Gamma^\theta{}_{r\theta} = r^{-1}$, $\Gamma^r{}_{r\theta} = 0$. Другие равенства выводятся так же.

(b) $V^r{}_{;r} = V^r{}_{,r}$; $V^r{}_{;\theta} = V^r{}_{,\theta} - rV^\theta$; $V^\theta{}_{;r} = V^\theta{}_{,r} + V^\theta/r$; $V^\theta{}_{;\theta} = V^\theta{}_{,\theta} + V^r/r$; $V^i{}_{;i} = V^r{}_{,r} + r^{-1}V^r + V^\theta{}_{,\theta} = r^{-1}(rV^r)_{,r} + V^\theta{}_{,\theta}$.

6.17. (a) $(\pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega})_{i\ldots k} = \tilde{\omega}_{i\ldots k,l}V^l + \omega_{i\ldots k}V^l{}_{,l} = \omega_{i\ldots k;l}V^l + \omega_{i\ldots k}V^l{}_{;l}$. Поэтому $V^l{}_{;l} = \mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V}$ при всех $\bar{V}$ тогда и только тогда, когда $\nabla\tilde{\omega} = 0$.

(b) $\omega_{i\ldots k;l} = \omega_{i\ldots k,l} - \Gamma^m{}_{ml}\omega_{i\ldots k} = (f_{,l} - f\Gamma^m{}_{ml})\varepsilon_{i\ldots k}$.

6.18. (a) $\nabla_{\bar{V}}[\mathrm{g}(\bar{A},\bar{B},)] = (\nabla_{\bar{V}}\mathrm{g})(\bar{A},\bar{B}) + \mathrm{g}(\nabla_{\bar{V}}\bar{A}, B) + \mathrm{g}(\bar{A}, \nabla_{\bar{V}}\bar{B}) = (\nabla_{\bar{V}}\mathrm{g})(\bar{A},\bar{B})$. Это равно нулю для всех $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{V}$ тогда и только тогда, когда $\nabla\mathrm{g} = 0$.

(b) Из равенства (6.29) следует, что $g_{ij,k} = \Gamma^l{}_{ik}g_{lj} + \Gamma^l{}_{jk}g_{il}$. Объединив различные g вместе, как в правой части (6.30), получаем нужный ответ.

6.19. Нам надо показать, что из (6.30) следует $\Gamma^i{}_{jk} = (\ln|g|^{1/2})_{,k}$. Это будет нетрудно, если мы докажем, что $g_{,k} = g^{ji}g_{ij,k}$. (Это справедливо для определителя любой матрицы.) Начнем с равенства $g = \varepsilon^{i\ldots k}g_{1i}\ldots g_{nk} = g_{1i}(\varepsilon^{ij\ldots k}g_{2j}\ldots g_{nk})$. Отсюда видно, что если *определить* $g^{i1} = g^{-1}\varepsilon^{ij\ldots k}g_{2j}\ldots g_{nk}$, то мы получим $1 = g_{1i}g^{i1}$. Далее, $g_{2i}g^{i1} = 0$ в силу антисимметричности ε. Таким образом, мы имеем явное выражение для матрицы, обратной к $g_{ij}: g^{ij} = ((n-1)!g)^{-1}\varepsilon^{il\ldots m}\times\varepsilon^{jk\ldots r}g_{lk}\ldots g_{mr}$. Теперь воспользуемся результатом из упр. 4.12(b): $g = \varepsilon^{il\ldots m}\varepsilon^{jk\ldots r}g_{ij}g_{lk}\ldots g_{mr}/n!$ и получим $g_{,a} = n\varepsilon^{il\ldots m}\varepsilon^{jk\ldots r}g_{ij,a}g_{lk}\ldots g_{mr}/n! = g_{ij,a}g^{ji}$. Дальнейшее просто.

6.20. Замените в (3.37) запятые на точки с запятой и используйте равенство $\nabla_i g_{jk} = 0$.

6.21. Доказывается прямым вычислением.

6.22. (b) Просто вычесть из (6.24) число связей, содержащихся в (6.33), нельзя, поскольку среди новых связей не все могут быть независимыми от старых. Вместо этого мы начнём всё заново и займёмся парами индексов. Из (6.23a) следует, что имеется $\frac{1}{2}n(n-1)$ независимых пар, а (6.33) означает, что R есть симметричная матрица в пространстве размерности $\frac{1}{2}n(n-1)$ и, значит, имеет $\frac{1}{2}[n(n-1)/2]\,[n(n-1)/2+1]=n(n-1)(n^2-n+2)/8$ независимых компонент. Теперь (6.23b) содержит меньше независимых связей, чем раньше. Рассмотрим всевозможные тройки (kij) $(n(n-1)(n-2)/3!$ возможных наборов); будет ли каждый выбор l давать независимую связь? Нет, потому что (6.23a) и (6.33) позволяют провести следующее преобразование: $3R_{l[kij]}=R_{lkij}+R_{ljki}+R_{lijk}=R_{klji}+R_{kilj}+R_{kjil}=3R_{k[lji]}$. Это значит, что новую информацию мы получаем, только если все *четыре* индекса различны, т. е. всего связей будет $n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$. Этот ответ совпадает с данным в задаче.

6.23. (a) Это следует из (6.33) и (6.23a).

6.24. Геодезическая задаётся уравнением (6.16a). Из него видно, что $\nabla_{\bar U}g(\bar U,\ \bar U)=0$; следовательно, если $g(\bar U,\ \bar U)\neq 0$, то малые вариации пути не изменят знака $g(d\bar x/d\lambda,\ d\bar x/d\lambda)$. Сначала займёмся пространственно-подобной геодезической. Из вариационного исчисления известно, что при вариации пути $\delta x^i(\lambda)$ вариация $\delta\int(g_{ij}\dot X^i\dot X^j)^{1/2}\,d\lambda$ с точностью до первого порядка равна $-\frac{1}{2}\int\delta x^i(\lambda)(-2d(g_{ij}\dot X^j)/d\lambda+g_{jk,i}\dot X^j\dot X^k)\times$ $\times(g_{ij}\dot X^i\dot X^j)^{-1/2}\,d\lambda=\int\delta x_i(\lambda)(\ddot X^i+\Gamma^i{}_{jk}\dot X^j\dot X^k)(g_{ij}\dot X^i\dot X^j)^{-1/2}\,d\lambda$. (Точки обозначают здесь $d/d\lambda$.) Отсюда следует, что геодезическая является экстремалью. В случае времени-подобной геодезической практически всё то же. В случае нулевой геодезической надо разбить интеграл на части так, чтобы в каждой из них вариация была или времени-подобной, или пространственно-подобной, или нулевой.

6.25. (a) $D_\mu\psi=\nabla_\mu\psi-iA_\mu\psi$; $D_\mu(e^{i\varphi(x)}\psi)=\nabla_\mu(e^{i\varphi}\psi)-i(A_\mu+$ $+\nabla_\mu\varphi)\psi=e^{i\varphi}(\nabla_\mu\psi-iA_\mu\psi)=e^{i\varphi}D_\mu\psi$.

(b) $D_\mu D_\nu\psi=\nabla_\mu\nabla_\nu\psi-iA_\nu\nabla_\mu\psi-i(\nabla_\mu A_\nu)\psi-iA_\mu\nabla_\nu\psi-A_\mu A_\nu\psi$. Поскольку $\nabla_\mu\nabla_\nu\psi=\nabla_\nu\nabla_\mu\psi$, то мы получаем $[D_\mu,\ D_\nu]\psi=$ $-i(\tilde d\tilde A)\psi$.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

[1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974 (к гл. 4).
[2] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп.— М.: Наука, 1968 (к гл. 3).
[3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979 (к гл. 1—6).
[4] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы гомологий. — М.: Наука, 1984 (к гл. 6).
[5] Зорич В. А. Математический анализ. В 2-х т. Т. 1. — М.: Наука, 1981; т. 2. — 1984 (к гл. 1, 2).
[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля. — М.: Наука, 1973 (к гл. 5—6); т. 3. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974 (к гл. 4); т. 5. Статистическая физика. — М.: Наука, 1974 (к гл. 5).
[7] Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономии.—М.: ИЛ. 1961 (к гл. 6).
[8] Масси У. Теория гомологий и когомологий. — М.: Мир, 1981 (к гл. 4).
[9] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Изд-во МГУ, 1980 (к гл. 1—4).
[10] Новиков С. П. (ред.) Теория солитонов. — М.: Наука, 1980 (к гл. 5).
[11] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1968 (к гл. 3).
[12] Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1976 (к гл. 5).
[13] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978 (к гл. 6).
[14] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970 (к гл. 1—4).
[15] Чжэнь Шэн-шэнь. Комплексные многообразия. — М.: ИЛ, 1961 (к гл. 6).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

При обозначениях указаны страницы, на которых они введены или получили новое толкование. По поводу соглашений о размещении индексов см. § 2.21, по поводу правила суммирования Эйнштейна — § 2.26.

Виды тензора

Специальные тензоры и т. п.

Специальные пространства

Операции

Различные обозначения

ОГЛАВЛЕНИЕ